Exercice 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f.

1. Étudier la limite de f en 2^+.

Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 2 ?

2. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$?

3. Démontrer que pour tout réel $x>2$, on a :

$$f(x)=x-1-\frac{1}{x-2}$$

4. Parmi les fonctions `Python` ci-dessous, quelle(s) sont celle(s) qui représentent la fonction f ? Justifier en exprimant en fonction de `x` la valeur retournée par chaque fonction.

```python
def f1(x):
    x = x + 1
    return x - 1 - 1 /(x - 2)
```

```python
def f2(x):
    y = x - 3
    return (x * y + 1)/(y + 1)
```

```python
def f3(x):
    return ((x - 3/2) ** 2 - 9/4)/(x - 2)
```

```python
def f4(x):
    y = 1/(x - 2)
    z = 1/y + 1
    return z - y
```

5. On représente graphiquement $\mathscr{C}_f$ la courbe de f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=x-1$ dans un repère orthonormal du plan d'unité 1 cm.

De plus pour tout réel $x>2$, on note F le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et G le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse x.

On a donc $F\big(x\,;f(x)\big)$ et $G(x\,;x-1)$.

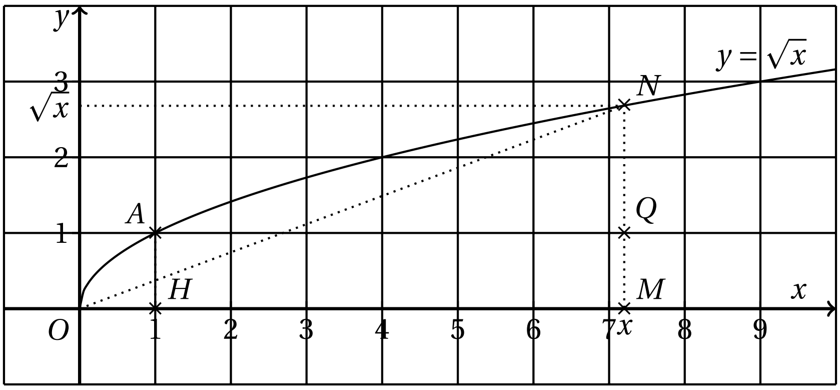
a. Exprimer la distance FG en fonction de x.

b. Justifier que la distance FG tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

c. On considère que deux points sont indiscernables à l'oeil, si la distance entre ces deux points est inférieure ou égale à 1 millimètre.
Déterminer l'abscisse à partir de laquelle les points F et G sont indiscernables à l'oeil.

Exercice 2

On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ dans un repère orthonormal du plan.



Sur cette courbe, on considère les points $O(0\,;0)$, origine du repère et $A(1\,;1)$.
Le point $H(1\,;0)$ est le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses.
Pour tout réel $x > 1$, on définit le point $M(x\,;0)$, le point $N\left(x\,;\sqrt{x}\right)$ et le point $Q(x\,;1)$. Ainsi le point M est d'abscisse strictement supérieure à celle de H.

1. **a.** Sans justifier, donner la nature du quadrilatère $HAQM$. En déduire que les longueurs AM et HQ sont égales.

   b. On se place dans le triangle OMN rectangle en M.
   Justifier que $HQ \leqslant ON$.

   c. Déduire des deux questions précédentes que $1 \leqslant \dfrac{AM}{MH} \leqslant \dfrac{ON}{MH}$.

2. **a.** Avec le théorème de Pythagore, justifier que $ON = \sqrt{x^2 + x}$.

   b. Justifier que $\dfrac{ON}{MH} = \dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x-1}$.

   c. Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$.

   d. Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\dfrac{x}{x-1}$.

   e. Déduire des deux questions précédentes la limite lorsque x tend vers $+\infty$ du rapport de longueur $\dfrac{ON}{MH}$.

3. Conclure sur la limite lorsque x tend vers $+\infty$ du rapport de longueur $\dfrac{AM}{MH}$.