Exercice 1

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}.$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.
3. On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Démontrer que $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. On considère le script Python ci-dessous :

```
from math import *
def seuil(n) :
    u = 5
    i = 0
    ℓ = (1 + sqrt(5))/2
    while abs(u-ℓ) >= 10**(-n) :
        u = sqrt(u+1)
        i = i+1
    return(i)
```

On rappelle que la commande **abs(x)** *renvoie la valeur absolue de x.*

a. Donner la valeur renvoyée par `seuil` (2).

b. La valeur renvoyée par `seuil (4)` est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2

On considère la suite (H_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Démontrer que la suite (H_n) est croissante.

2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$$

3. Démontrer que la suite (H_n) a une limite qui est soit un réel ℓ soit $+\infty$.

4. On formule l'hypothèse $\mathscr{H}$ que la limite de la suite (H_n) soit un réel ℓ.

a. Montrer que ℓ doit alors vérifier l'inégalité $\ell \geqslant \ell + \frac{1}{2}$.

b. L'hypothèse $\mathscr{H}$ est-elle valide ?

5. Déduire de la question précédente, la limite de la suite (H_n).

6. Le raisonnement effectué dans les questions **4.** et **5.** s'appelle un *raisonnement par l'absurde*. Expliquer quelles sont les étapes d'un raisonnement par l'absurde en s'appuyant sur l'exemple du raisonnement précédent.

Exercice 3

On veut déterminer la limite de la suite S définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3 + k^2}$$

1. Démontrer que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\frac{n^2}{n^3 + k^2} \leqslant \frac{n^2}{n^3 + 1}$$

2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$S_n \leqslant \frac{n^3}{n^3 + 1}$$

3. Déterminer la limite ℓ de la suite de terme général $\frac{n^3}{n^3 + 1}$.

4. Déterminer une suite minorant la suite S, qui converge vers la même limite ℓ.

5. Conclure sur la limite de la suite S.