Exercice 1 *Suite arithmétique et raisonnement par récurrence*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1. **a.** Calculer u_1.

   b. Les valeurs de $u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$ sont respectivement égales à :
   45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
   À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
   Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à :
   $$4n^2 + 12n$$

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
   $$u_n = 4n^2 + 12n + 5$$

4. Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.

Exercice 2 *Équation différentielle*

On considère l'équation différentielle (E) définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$(E_1) : \quad \frac{f'}{2\sqrt{f+3}} = 2\sqrt{f+3} + 2 \quad \text{avec } f \text{ dérivable sur } [0\,;+\infty[\text{ telle que pour tout } x \geqslant 0 \text{ on a } f(x) > -3$$

(E_1) n'est pas de la forme $f' = af + b$, on dit que c'est une *équation différentielle non linéaire*. Nous allons la résoudre en nous ramenant à une équation différentielle de la forme $f' = af + b$ avec un *changement d'inconnue.*

Partie A : Analyse d'une solution de (E_1)

L'objectif de cette partie est de déterminer la forme d'une solution de l'équation (E_1) sous l'hypothèse qu'une solution existe.

On suppose qu'il existe une fonction y qui est :

- dérivable sur $[0\,;+\infty[$;
- telle que pour tout réel $x \geqslant 0$ on a $y(x) > -3$;
- y est solution de l'équation différentielle (E_1).

1. Justifier que si y existe alors pour tout réel $x \geqslant 0$ on a $\sqrt{y(x)+3} > 0$.

2. **a.** Justifier que si y existe alors la fonction z définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par $z(x) = \sqrt{y(x)+3}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

b. Montrer que la fonction z ainsi définie est solution de l'équation différentielle :

$$(E_2) \quad g' = 2g + 2 \quad \text{avec } g \text{ dérivable et strictement positive sur } [0\,;+\infty[$$

c. En déduire que z est alors définie sur $[0\,;+\infty[$ par $z(x) = C\mathrm{e}^{2x} - 1$ avec le paramètre C vérifiant la condition $C > 1$.

d. En déduire que si y existe alors elle est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$y(x) = C^2\mathrm{e}^{4x} - 2C\mathrm{e}^{2x} - 2 \quad \text{avec } C > 1$$

Partie B : Synthèse et solution générale de (E_1)

Dans la partie précédente on a démontré qu'une solution y de (E_1) était forcément définie sur $[0\,;+\infty[$ par $y(x) = C^2e^{4x} - 2Ce^{2x} - 2$ avec $C > 1$. Dans cette partie on va vérifier qu'une telle fonction est effectivement solution de (E_1).

On considère une fonction y dérivable sur $[0\,;+\infty[$ telle que :

$$y(x) = C^2\mathrm{e}^{4x} - 2C\mathrm{e}^{2x} - 2 \quad \text{avec } C > 1$$

1. Vérifier que pour tout réel $x \geqslant 0$ on a $y(x) = (C\mathrm{e}^{2x} - 1)^2 - 3$.
2. En déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $y(x) > -3$.
3. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a :

$$\frac{y'}{2\sqrt{y+3}} = 2\sqrt{y+3} + 2$$

.

On déduit des deux questions précédentes que la fonction y est une solution de l'équation (E_1).

Partie C : Recherche d'une solution particulière de (E_1)

*On a démontré dans la partie **Analyse** qu'une solution y de E_1 est nécessairement définie sur $[0\,;+\infty[$ par $y(x) = C^2e^{4x} - 2Ce^{2x} - 2$ avec $C > 1$. Ensuite on a démontré dans la partie **Synthèse** qu'une fonction de cette forme est effectivement solution de (E_1). On en déduit que (E_1) admet pour solutions les fonctions y de cette forme.*

1. Déterminer la solution y de (E_1) qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1021$.