

Exercice 1

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.

De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

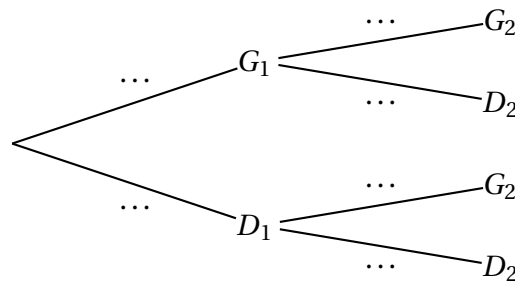
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n -ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n -ième partie de la journée ».

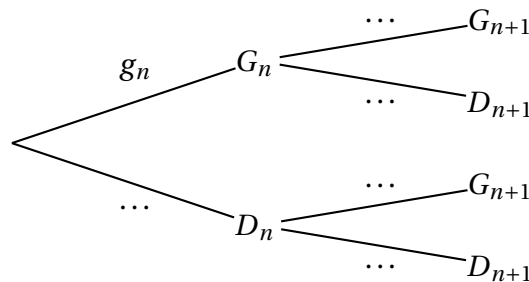
Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n .

On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{G_1}(D_2)$?
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2 .
4. Soit n un entier naturel non nul.
 - a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n -ième et $(n + 1)$ -ième parties de la journée.



- b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.

- a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera son premier terme et sa raison.

- b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul on a :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n) .

7. a. Avec la calculatrice, déterminer les valeurs approchées à 10^{-10} près de g_{10} , g_{20} , g_{30} et g_{50} .

- b. Quelle limite ℓ peut-on conjecturer pour la suite g ?
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1 def seuil(e) :
2     g = 0.5
3     n = 1
4     while ... :
5         g = 0.5 * g + 0.2
6         n = ...
7     return (n)
```