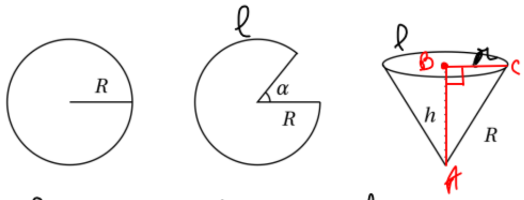
Devoir à la maison non noté, ne compte pas dans la moyenne

Exercice 1



R est le rayon du disque patron
A est le sommet du cône
B est le centre du disque de base
$h = AB$ est la hauteur du cône
$r = BC$ est le rayon du disque de base
ℓ est le périmètre du disque de base

Dans un disque en carton de rayon R , on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.
On appelle ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.
On rappelle que :

- le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathscr{A}$ et de hauteur h est $\dfrac{1}{3}\mathscr{A}h$.
- la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ, exprimé en radians, est $r\theta$.

Partie A

Dans cette partie, on fixe $R = 40$ cm.

1. Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est $V(h) = \dfrac{1}{3}\pi\left(1600 - h^2\right)h$.
2. Expliquer pourquoi on ne peut définir la fonction V que sur l'intervalle $[0\,;40]$.
3. La fonction V est dérivable sur $[0\,;40]$ comme produit de fonctions dérivables. On note V' sa fonction dérivée.
   a. Soit h un réel positif, déterminer une expression de $V'(h)$.
   b. Déterminer le tableau de variations de la fonction V sur l'intervalle $[0\,;40]$ en justifiant les variations de V.
   c. En déduire la valeur de h pour laquelle le volume du cône est maximum.
   d. Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum ? Donner un arrondi de α au degré près.

Partie B

Dans cette partie, la valeur du rayon R est un paramètre strictement positif.

1. Exprimer le volume du cône, en fonction de sa hauteur h.

2. Montrer que volume du cône est maximum pour $h = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

3. La valeur de l'angle de découpe α pour laquelle le volume du cône est maximal dépend-elle du paramètre R ? Justifier.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et on note f sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Citer la propriété du programme de première qui permet d'exprimer la fonction dérivée de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

2. **a.** Soit x un réel, exprimer $f'(x)$.
   b. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

3. **a.** Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. Dresser son tableau de variation en précisant la valeur de $f(0)$.
   b. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

4. Démontrer que pour tout réel x, on a $f(-x) = -f(x)$. Quelle propriété peut-on en déduire pour la courbe de f dans un repère du plan ?

5. f' est elle même dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f'' sa fonction dérivée qui est la dérivée seconde de f.
   a. Soit x un réel, exprimer $f''(x)$ puis établir une relation avec f.
   b. Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$. Justifier

6. On donne ci-dessous une partie de la représentation de la courbe de f. Comment lire ce graphique pour retrouver le signe de f et les variations de f et de f' ?