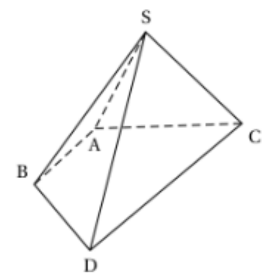
Coordonnées dans l'espace
Correction de la fiche d'exercices

Exercice 2 *Asie juin 2024 J1*



Dans l'espace muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points : A$(3\,;\,-1\,;\,1)$; B$(4\,;\,-1\,;\,0)$; C$(0\,;\,3\,;\,2)$; D$(4\,;\,3\,;\,-2)$ et S$(2\,;\,1\,;\,4)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. a. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
   b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
   On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.

1) A, B, C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-3\\-1-(-1)\\0-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-3\\3-(-1)\\2-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AB}$ colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ ssi $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} \iff \begin{cases}1 = -3\lambda\\0 = 4\lambda\\-1 = \lambda\end{cases} \iff \begin{cases}-\frac{1}{3} = \lambda\\0 = \lambda\\-1 = \lambda\end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et A, B, C ne sont pas alignés

Les points A, B, C non alignés définissent donc un plan

2)a) Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires équivaut à démontrer que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires.

On a $\vec{AD}\begin{pmatrix} 4-3 \\ 3-(-1) \\ -2-1 \end{pmatrix}$ $\vec{AD}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Puisque $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires si et seulement si : $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ avec x et y réels.

$$\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \iff \begin{cases} 1 = x - 3y \\ 4 = 0x + 4y \\ -3 = -x + y \end{cases} \iff \begin{cases} 1+3 = x \\ 1 = y \\ x = 1+3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4 = x \\ 1 = y \\ 4 = x \end{cases}$$

Le système a pour couple solution $x=4$ et $y=1$, donc $\vec{AD} = 4\vec{AB} + \vec{AC}$, donc $\vec{AD}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires, donc A, B, C, D sont coplanaires

Exercice 3 *Métropole juin 2024 J2*

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.

Dans l'espace muni d'un repère, on considère les points suivants :

A(2 ; 0 ; 0), B(0 ; 4 ; 3), C(4 ; 4 ; 1), D(0 ; 0 ; 4) et H(−1 ; *1* ; 2).

Affirmation 1 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 2 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$

les points A, B, C et D sont coplanaires ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ non coplanaires ssi $\left(x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD} = \vec{0} \text{ équivaut à } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \right)$

On résout le système :

$$x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} -2x+2y-2z=0 \\ 4x+4y=0 \\ 3x+y+4z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2(-y)-2y-2z=0 \\ x=-y \\ 3\times(-y)+y+4z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2z=0 \\ x=-y \\ -2y+4z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ x=-y \\ y=-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires et que l'affirmation 1 est fausse

• Affirmation 2 :

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1-2\\1-4\\2-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \begin{cases}2=-3\lambda\\4=-3\lambda\\1=-\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{2}{3}=\lambda\\-\frac{4}{3}=\lambda\\-1=\lambda\end{cases}$

Le système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BH}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (AC) et (BH) ne sont pas parallèles.

(AC) et (BH) sont donc sécantes si elles ont un point d'intersection, sinon elles sont non coplanaires

On exprime des représentations paramétriques des 2 droites :

$(AC)\begin{cases}x=x_A+t\,x_{\overrightarrow{AC}}\\y=y_A+t\,y_{\overrightarrow{AC}}\\z=z_A+t\,z_{\overrightarrow{AC}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+2t\\y=0+4t\\z=0+t\end{cases}$

$(BH)\begin{cases}x=x_B+\mu\,x_{\overrightarrow{BH}}\\y=y_B+\mu\,y_{\overrightarrow{BH}}\\z=z_B+\mu\,z_{\overrightarrow{BH}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0-3\mu\\y=4-3\mu\\z=3-\mu\end{cases}$

On résout ensuite le système : $\begin{cases}x=2+2t\\y=4t\\z=t\\x=-3\mu\\y=4-3\mu\\z=3-\mu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3\mu=2+2t\\4-3\mu=4t\\3-\mu=t\\x=-3\mu\\y=4-3\mu\\z=3-\mu\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\mu = 2+2t \\ 4-3\mu = 4t \\ 3-\mu = t \\ x=-3\mu \\ y=4-3\mu \\ z=3-\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\mu = 2+2(3-\mu) \\ 4-3\mu = 4(3-\mu) \\ 3-\mu = t \\ x=-3\mu \\ y=4-3\mu \\ z=3-\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = \mu \\ \mu = 8 \\ 3-\mu = t \\ x=-3\mu \\ y=4-3\mu \\ z=3-\mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 8 \\ t = 3-8 = -5 \\ x = -24 \\ y = 4-24 = -20 \\ z = 3-8 = -5 \end{cases}$$

Les droites (AC) et (BH) sont donc sécantes en un point de coordonnées $(-24 ; -20 ; -5)$

$\boxed{\text{L'affirmation 2 est donc vraie.}}$

Exercice 4 *Vecteurs coplanaires*

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. *Les questions 1. et 2. sont indépendantes.*

1. Déterminer dans chaque cas la valeur de m pour que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

   a. $\vec{u}\,(1;2;1)$, $\vec{v}\,(-1;1;2)$ et $\vec{w}\,(0;3;m)$; **b.** $\vec{u}\,(-2;1;3)$, $\vec{v}\,(1;1;1)$ et $\vec{w}\,(m;1;-3)$.

2. Soit les vecteurs $\vec{u}\,(0;1;0)$, $\vec{v}\,(1;1;2)$ et $\vec{w}\,(2;2;3)$.

   a. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

   b. Déterminer un triplet (a,b,c) tel que $(1;1;1) = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

1) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ non coplanaires ssi ($x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ équivaut à $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$)

On résout le système.

$$x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0} \iff \begin{cases} x\times 1+y\times(-1)+z\times 0=0 \\ x\times 2+y\times 1+z\times 3=0 \\ x\times 1+y\times 2+mz=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=y \\ 2y+y+3z=0 \\ y+2y+mz=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=y \\ y=-z \\ -3z+mz=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ y=-z \\ (m-3)z=0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

ssi $m\neq 3$.

Donc $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ non coplanaires ssi $m\neq 3$

et $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ coplanaires ssi $m=3$

b) Avec la même méthode on résout le système.

$$x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0} \iff \begin{cases} -2x+y+mz=0 \\ x+y+z=0 \\ 3x+y-3z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2(-y-z)+y+mz=0 \\ x=-y-z \\ 3(-y-z)+y-3z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y+(m+2)z=0 \\ x=-y-z \\ -2y-6z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3z+(m+2)z=0 \\ x=2z \\ y=-3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)z=0 \\ x=2z \\ y=-3z \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

ssi $m-1 \neq 0$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc non coplanaires ssi $m-1 \neq 0$

et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi $m=1$.

2. Soit les vecteurs $\vec{u}$ (0; 1; 0), $\vec{v}$ (1; 1; 2) et $\vec{w}$ (2; 2; 3).

a. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires?

b. Déterminer un triplet (a, b, c) tel que $(1; 1; 1) = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

2)

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ non coplanaires ssi ($x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ équivaut à $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$)

On résout le système :

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x\times 0 + y\times 1 + z\times 2 = 0 \\ x\times 1 + y\times 1 + z\times 2 = 0 \\ x\times 0 + y\times 2 + z\times 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x + y + 2z = 0 \\ y = -\frac{3}{2}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2z = -\frac{3}{2}z \\ x + y + 2z = 0 \\ y = -\frac{3}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.

2) a)

On résout le système d'inconnues a, b, c :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} \iff \begin{cases} 1 = a\times 0 + b\times 1 + c\times 2 \\ 1 = a\times 1 + b\times 1 + c\times 2 \\ 1 = a\times 0 + b\times 2 + c\times 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 = b+2c \\ 1 = a+b+2c \\ 1 = 2b+3c \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = b+2c \\ 1 = a+1 \\ 1 = 2b+3c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 = b+2c \\ a = 0 \\ b+2c = 2b+3c \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = -c+2c \\ a = 0 \\ b = -c \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

On en déduit que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ peut s'exprimer comme : $-\vec{v} + \vec{w}$

Exercice 5 *Points coplanaires*

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Dans chaque cas, déterminer si les points A, B, C et D sont coplanaires.

1. $A(2;-1;3)$, $B(2;1;1)$, $C(5;0;3)$ et $D(8;1;4)$.

Dans tous les cas de cet exercice on applique le critère suivant :

A, B, C, D sont coplanaires ssi $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ coplanaires

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{AD}\begin{pmatrix}6\\2\\1\end{pmatrix}$

$x\vec{AB}+y\vec{AC}+c\vec{AD}=\vec{0}$ ssi $\begin{cases}0x+3y+6z=0\\2x+y+2z=0\\-2x+0y+z=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-2z\\2x+0=0\\z=2x\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\x=0\\z=0\end{cases}$

L'unique solution du système équivalent à $x\vec{AB}+y\vec{AC}+c\vec{AD}=\vec{0}$ est $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}$ donc les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont non coplanaires

2. $A(2;2;0)$, $B(1;1;-1)$, $C(0;6;2)$ et $D(1;1;-1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$$x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0} \iff \begin{cases}-x-2y-z=0\\-x+4y-z=0\\-x+2y-z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=-2y-z\\-(-2y-z)+4y-z=0\\-(-2y-z)+2y-z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=-2y-z\\6y=0\\4y=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-z\\y=0\\z=0\end{cases}$$

Les solutions du système équivalent à $x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}$ sont les triplets $(-z, 0, z)$ avec $z\in\mathbb{R}$. Le système n'a pas une unique solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

3. $A(1;-7;1)$, $B(5;2;-2)$, $C(7;3;0)$ et $D(1;2;-8)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\9\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\10\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\9\\-9\end{pmatrix}$

$$x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0} \iff \begin{cases}4x+6y+0z=0\\9x+10y+9z=0\\-3x-y-9z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}4x+6y=0\\9x+10(-3x-9z)+9z=0\\y=-3x-9z\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}4x+6y=0\\-21x-81z=0\\y=-3x-9z\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}4x+6(-3x-9z)=0\\7x=-27z\\y=-3x-9z\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}-14x-54z=0\\7x=-27z\\y=-3x-9z\end{cases} \iff \begin{cases}x=-\frac{27}{7}z\\y=\frac{81}{7}z-\frac{63}{7}z=\frac{18}{7}z\end{cases}$$

Les solutions du système sont les triplets $\left(-\frac{27}{7}z ; \frac{18}{7}z ; z\right)$ avec $z \in \mathbb{R}$.
Le triplet $(0;0;0)$ n'est donc pas l'unique solution et donc les vecteurs sont coplanaires.

Exercice 6 *Amérique du Nord 2024 J1*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. L'espace est rapporté à un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. On considère les points A(1 ; 0; 3) et B(4; 1 ; 0). Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a. $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 3+t \\ y &=& 1 \\ z &=& -3+3t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

b. $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 1+4t \\ y &=& t \\ z &=& 3 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

c. $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 1+3t \\ y &=& t \\ z &=& 3-3t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

d. $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 4+t \\ y &=& 1 \\ z &=& 3-3t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$

- Un vecteur directeur de (AB) doit être colinéaire à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- La représentation c) correspond à

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_A + t\,x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + t\,y_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_A + t\,z_{\overrightarrow{AB}} \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

donc c'est une représentation paramétrique de la droite (AB)

On considère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

2. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

a. M(7 ; 6 ; 6) **b.** N(3 ; 6 ; 4) **c.** P(4 ; 6 ; −2) **d.** R(−3 ; −9 ; 7)

Pour déterminer si un point de coordonnées (X, Y, Z) appartient à (d) on résout le système d'inconnue t

$$\begin{cases} X = 3+4t \\ Y = 6t \\ Z = 4-2t \end{cases}$$

Les systèmes avec les coordonnées de M, N et P à la place de (X, Y, Z) n'ont pas de solution. En revanche pour R le système s'écrit :

$$\begin{cases} -3 = 3+4t \\ -9 = 6t \\ 7 = 4-2t \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{6}{4} = t \\ -\frac{9}{6} = t \\ -\frac{3}{2} = t \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{3}{2} = t \\ -\frac{3}{2} = t \\ -\frac{3}{2} = t \end{cases}$$

Le système a une solution donc le point R appartient à la droite (d)

3. On considère la droite (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2+3k \\ y = -1-2k \\ z = 1+k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Les droites (d) et (d') sont :

a. sécantes **b.** non coplanaires **c.** parallèles **d.** confondues

On rappelle la représentation paramétrique de (d) :

$$\begin{cases} x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases}$$

Un vecteur directeur de (d') est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{v} \neq \vec{0}$ donc $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ ssi $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} \iff \begin{cases} 3 = 4\lambda \\ -2 = 6\lambda \\ 1 = -2\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{4} = \lambda \\ -\frac{1}{3} = \lambda \\ -\frac{1}{2} = \lambda \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

On en déduit que (d) et (d') ne sont pas parallèles et sont donc sécantes si elles ont un point d'intersection ou non coplanaires sinon.

Pour le déterminer, on résout le système :

$$\begin{cases} x = -2+3k \\ y = -1-2k \\ z = 1+k \\ x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases} \iff \begin{cases} 3+4t = -2+3k \\ 6t = -1-2k \\ 4-2t = 1+k \\ x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases} \iff \begin{cases} 3+4t = -2+3(3-2t) \\ 6t = -1-2(3-2t) \\ k = 3-2t \\ x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases} \iff \begin{cases} 10t = 4 \\ 10t = -7 \\ k = 3-2t \\ x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases}$$

Les deux premières équations sont incompatibles, donc le système n'a pas de solution, donc les droites (d) et (d') n'ont pas de point d'intersection.

Comme elles sont non parallèles, elles sont donc non coplanaires.

Exercice 7 *Polynésie mars 2023*

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère :

- d_1 la droite passant par le point H(2 ; 3 ; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;
- d_2 la droite de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2k-3\\ y &=& k\\ z &=& 5\end{array}\right.$ où k décrit $\mathbb{R}$..

1. Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d_2.
2. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
3. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.
4. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?

1) Une représentation paramétrique de d_2

est $\left\{\begin{array}{l} x = -3 + 2k\\ y = 0 + 1\times k\\ z = 5 + 0\times k\end{array}\right.$

Un vecteur directeur de $\vec{v}$ est $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

2) d_1 et d_2 sont parallèles ~~ssi~~ leurs vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{v} \neq \vec{0}$ donc $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ ssi $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

$$\vec{u} = \lambda \vec{v} \iff \begin{cases} 1 = 2\lambda \\ -1 = 1 \times \lambda \\ 1 = 0 \times \lambda \leftarrow \text{impossible} \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

3) Pour démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes, il suffit de prouver qu'elles n'ont pas unique point d'intersection.

La droite d_1 passant par $H(2;3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_H + t \times 1 \\ y = y_H + t \times (-1) \\ z = z_H + t \times 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

On détermine la nature de l'intersection de d_1 et d_2 en résolvant le système constitué de leurs deux représentations paramétriques

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \\ x = 2k-3 \\ y = k \\ z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2k-3 = 2+t \\ k = 3-t \\ 5 = t \\ x = 2k-3 \\ y = k \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -7 = 7 \\ k = -2 \\ t = 5 \\ x = 2k-3 \\ y = k \\ z = 5 \end{cases}$$

La première équation n'a pas de solution donc le système non plus

Par conséquent les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

4) d_1 et d_2 ne sont ni parallèles d'après 2), ni sécantes d'après 3), donc elles sont non coplanaires.

Exercice 8 *Intersection de droites dans l'espace*

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Soit le point $A(1;6;-3)$ et la droite $\mathscr{D}$ passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1;-2;1)$.
Déterminer dans chaque cas l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec la droite définie par un point et un vecteur directeur.

1. $B(2;6;-2)$ et $\vec{v}(1;1;-1)$;
2. $C(11;10;7)$ et $\vec{w}(1;0;1)$;
3. $D(8;13;4)$ et $\vec{n}(-2;4;-2)$;
4. $E(5;2;-3)$ et $\vec{a}(-2;0;3)$.

$\mathscr{D}$ de représentation paramétrique

$$\mathscr{D}\begin{cases} x = x_A + t\vec{u} \\ y = y_A + t\vec{u} \\ z = z_A + t\vec{u} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+t \\ y = 6-2t \\ z = -3+t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

1) $$\mathscr{D}_1\begin{cases} x = x_B + k\,x_{\vec{v}} = 2+k \\ y = y_B + k\,y_{\vec{v}} = 6+k \\ z = z_B + k\,z_{\vec{v}} = -2 - k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (à détailler)
donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}_1$ ne sont pas parallèles

On résout le système :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 6-2t \\ z = -3+t \\ x = 2+k \\ y = 6+k \\ z = -2-k \end{cases} \iff \begin{cases} 2+k = 1+t \\ 6+k = 6-2t \\ -2-k = -3+t \\ x = 2+k \\ y = 6+k \\ z = -2-k \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1+k \\ 6+k = 4-2k \\ 1-k = t \\ x = 2+k \\ y = 6+k \\ z = -2-k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1-k = 1+k \\ k = -\frac{2}{3} \\ 1-k = t \\ x = 2+k \\ y = 6+k \quad z = -2-k \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = k \\ k = -\frac{2}{3} \\ \vdots \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution

Les droites D_0 et D_1 ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont donc non coplanaires.

2) $D_2 \begin{cases} x = x_C + k\, x_{\vec{w}} \\ y = y_C + k\, y_{\vec{w}} \\ z = z_C + k\, z_{\vec{w}} \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

donc $D_2 \begin{cases} x = 11 + k \\ y = 10 \\ z = 7 + k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (à détailler) donc D_0 et D_2 ne sont pas parallèles et on résout le système :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 6 - 2t \\ z = -3 + t \\ x = 11 + k \\ y = 10 \\ z = 7 + k \end{cases} \iff \begin{cases} 11 + k = 1 + t \\ 10 = 6 - 2t \\ 7 + k = -3 + t \\ x = 11 + k \\ y = 10 \\ z = 7 + k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k = -12 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = 11 - 12 = -1 \\ y = 10 \\ z = 7 - 12 = -5 \end{array}$$

Le système a une unique solution donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes au point de coordonnées $(-1;10;-5)$

3) $\mathcal{D}_3 \begin{cases} x = x_D + k\, x_{\vec{n}} \\ y = y_D + k\, y_{\vec{n}} \\ z = z_D + k\, z_{\vec{n}} \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$\mathcal{D}_3 \begin{cases} x = 8 - 2k \\ y = 13 + 4k \\ z = 4 - 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$\vec{n} = -2\vec{u}$ donc $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_0$ sont parallèles car leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Pour déterminer si elles sont parallèles distinctes ou confondues, on détermine si le point $D(8;13;4)$ de $\mathcal{D}_3$ appartient à $\mathcal{D}_0$ en résolvant le système

$$\begin{cases} 8 = 1 + t \\ 13 = 6 - 2t \\ 4 = 1 - 3t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 7 \\ 13 = -8 \\ 4 = -20 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc le point D de $\mathcal{D}_3$ n'appartient à $\mathcal{D}_0$, donc les droites parallèles $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}_3$ sont strictement parallèles

4) $\mathcal{D}_4 \begin{cases} x = x_E + k\, x_{\vec{a}} \\ y = y_E + k\, y_{\vec{a}} \\ z = z_E + k\, z_{\vec{a}} \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}_4 \begin{cases} x = 5 - 2k \\ y = 2 + 0 \times k \\ z = -3 + 3k \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 - 2k \\ y = 2 \\ z = -3 + 3k \end{cases}$$

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{a} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (à détailler) donc les droites

D_1 et D_2 ne sont pas parallèles

On détermine si elles ont un point d'intersection en résolvant le système :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 6-2t \\ z = -3+t \\ x = 5-2k \\ y = 2+0\times k \\ z = -3+3k \end{cases} \iff \begin{cases} 5-2k = 1+t \\ 2 = 6-2t \\ -3+3k = -3+t \\ x = 5-2k \\ y = 2 \\ z = -3+3k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2 = 2k \\ t = 2 \\ k = \frac{2}{3} \\ x = 5-2k \\ y = 2 \\ z = -3+3k \end{cases} \iff \begin{cases} k = 1 & (1) \\ t = 2 \\ k = \frac{2}{3} & (3) \\ \text{etc...} \\ \vdots \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) sont incompatibles donc le système n'a pas de solution donc les droites D_1 et D_2 qui ne sont pas parallèles, ne sont pas non plus sécantes.

Les droites D_1 et D_4 sont donc non coplanaires