Histoire 1

Au XVIII^{ième} siècle, l'Anglais Abraham Moivre et le Français Pierre Simon de Laplace ont étudié les distributions binomiales qui donnent par exemple la répartition des succès lorsqu'on répète plusieurs fois de façon identique une même expérience aléatoire à deux issues comme un lancer de pièce. Par exemple sur un échantillon de taille n, si on suppose que la probabilité de naissance d'un garçon est de $\dfrac{22}{21+22}$ (établie par mesure statistique), le nombre de naissances de garçons est une fonction dont la valeur dépend du hasard, on parle de variable aléatoire, et dont la loi suit une distribution binomiale de paramètres n et p. Par combinatoire, on peut déterminer les probabilités de tous les nombres de naissances de garçons possibles entre 0 et n. On peut en déduire la valeur moyenne et l'écart-type de la variable aléatoire comme pour une série statistique. À partir de ces indicateurs, Laplace a pu établir des intervalles de fluctuation du nombre de naissances de garçons et déterminer si la distribution sur une commune particulière était normale. Cette normalité, est attachée au théorème de Moivre-Laplace qui établit une convergence des distributions binomiales (après changement d'origine et d'échelle) vers la distribution en cloche d'une variable aléatoire universelle appelée loi normale centrée réduite. Plus généralement, cette universalité est atteinte lors de la superposition d'un grand nombre de causes aléatoires indépendante ce qui a permis à Gauss de développer une théorie de « l'incertitude de la mesure ».

1 Transformation affine de variables aléatoires

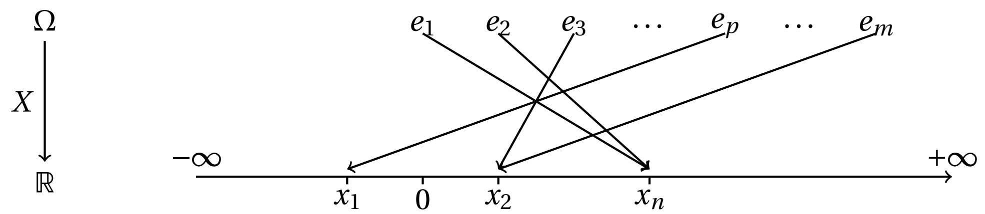
1.1 Rappels sur les variables aléatoires

Définition 1 ***Variable aléatoire et loi de probabilité***

Soit $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_p, \cdots, e_m\}$ **l'ensemble fini** décrivant l'univers d'une expérience aléatoire et $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω.
A chaque issue on associe un nombre, on définit ainsi une fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ appelée **variable aléatoire**.
On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n\}$ avec $n \leqslant m$ l'ensemble de ces nombres appelé **ensemble image** de X.

Définir la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur x_i le nombre $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ qui est la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$ constitué des issues auxquelles x_i est associée.

valeur k	x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
probabilité $\mathbb{P}(X=k)$	p_1	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n



Définition 2

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$.
On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs prises par X avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$.
On définit trois indicateurs pour caractériser la loi de la variable aléatoire X.

- L'**espérance E** de la variable aléatoire X, notée $\mathbb{E}(X)$, est définie par :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}\big(X = x_1\big) \times x_1 + \mathbb{P}\big(X = x_2\big) \times x_2 + \ldots + \mathbb{P}\big(X = x_n\big) \times x_n = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

  - $\mathbb{E}(X)$ s'interprète comme la **valeur moyenne** prise par X lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience (*loi des grands nombres*).
  - $\mathbb{E}(X)$ s'exprime dans la même unité que les valeurs prises par X.
  - Un jeu est **équitable** lorsque l'espérance de gain est nulle, il est **favorable au joueur** si cette espérance de gain est positive.

- La **variance V** de la variable aléatoire X, notée $\mathbb{V}(X)$, est définie par :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = p_1 (x_1 - \mathbb{E}(X))^2 + p_2 (x_2 - \mathbb{E}(X))^2 + \cdots + p_n (x_n - \mathbb{E}(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mathbb{E}(X))^2}$$

  - $\mathbb{V}(X)$ mesure le carré de la distance moyenne des valeurs prises par X par rapport à sa valeur moyenne lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience.
  - $\mathbb{V}(X)$ est un nombre positif qui s'exprime dans l'unité au carré des valeurs prises par X.
  - Un jeu est d'autant plus **risqué** que sa variance est grande.
  - $\mathbb{V}(X)$ se calcule en pratique avec la formule de Konig :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^2 = \mathbb{E}\big(X^2\big) - (\mathbb{E}(X))^2}$$

- **L'écart-type** σ de la variable aléatoire X, noté $\sigma(X)$, est la racine carrée de $\mathbb{V}(X)$:

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

  - $\sigma(X)$ mesure la distance moyenne des valeurs prises par X par rapport à sa valeur moyenne lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience.
  - $\sigma(X)$ est un nombre positif qui s'exprime dans l'unité des valeurs prises par X.
  - Un jeu est d'autant plus **risqué** que son écart-type est grand.

Capacité 1 ***Calculer une espérance, une variance, un écart type***

1. On considère la variable aléatoire Y dont la loi est donnée ci-dessous :

k	-5	1	2	10
$\mathbb{P}(Y=k)$	0,35	0,5	...	0,1

   a. Détailler les calculs de l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de Y, de sa variance $\mathbb{V}(Y)$ et de son écart-type $\sigma(Y)$.

   b. Retrouver ces résultats avec l'éditeur de listes de la calculatrice.

2. On lance un dé à 6 faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le nombre porté par la face du dessus.

   Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

3. On lance un dé à n faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à n et on note Y le nombre porté par la face du dessus.

   Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Y.

Capacité 2 ***Calculer une espérance, une variance, un écart type***

Source : « *Visa pour la prépa* » *de Guillaume Connan.*
Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36 dont 18 sont rouges et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte.
Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire gagne deux fois sa mise si la couleur choisie sort.
Un joueur qui mise sur un numéro de 1 à 36 gagne 36 fois sa mise si le numéro sort.
Il est interdit de miser sur le zéro.

1. Un joueur mise a euros sur une couleur. Soit C la variable aléatoire correspondant au gain associé. Déterminer la loi de C puis calculer $\mathbb{E}(C)$ et $\sigma(C)$.

2. Un joueur mise a euros sur un numéro. Soit N la variable aléatoire correspondant au gain associé. Déterminer la loi de N puis calculer $\mathbb{E}(N)$ et $\sigma(N)$.

3. Vaut-il mieux miser sur une couleur ou sur un numéro ?

1.2 Transformation affine d'une variable aléatoire

Définition 3

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$.
Pour tous réel a et b , la variable aléatoire $aX+b$ associe à chaque issue ω le réel aX(ω)+b.
Si on note x_i avec $1 \leqslant i \leqslant n$ les valeurs prises par X alors variable aléatoire $aX+b$ prend les valeurs ax_i+b et pour tout indice i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $\mathbb{P}(aX+b=ax_i+b)=\mathbb{P}(X=x_i)$.

Propriété 1

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$.

Pour tous réel a et b , on a :

- $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$
- $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$
- $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

Démonstration

Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

• Par définition de l'espérance de $aX+b$:

$$E(aX+b) = \sum_{k=1}^{n} (ax_k+b) \times P(X=x_k)$$

$$E(aX+b) = a\underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k P(X=x_k)}_{E(X)} + b\underbrace{\sum_{k=1}^{n} P(X=x_k)}_{=1}$$

donc $E(aX+b) = a\,E(X)+b$

• Par définition de la variance de $aX+b$:

$$V(aX+b) = \sum_{k=1}^{n} (ax_k+b-(aE(X)+b))^2 P(X=x_k)$$

$$V(aX+b) = \sum_{k=1}^{n} a^2(x_k-E(X))^2 P(X=x_k)$$

$$V(aX+b) = a^2\sum_{k=1}^{n} (x_k-E(X))P(X=x_k) = a^2\,V(X)$$

Capacité 3 ***Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème***

1. Le nombre de spectateurs pour un festival de musique définit une variable aléatoire X d'espérance 12 000 et de variance 1 500. Chaque billet est vendu au tarif de 45 € et le coût global d'organisation du festival est de 100 000 €.

   Soit B la variable aléatoire associée au bénéfice réalisé par l'organisateur du spectacle.

   Déterminer $\mathbb{E}(B)$ et $\sigma(B)$.

2. On considère que pour la session 2 020 d'un concours, la note X sur 10 attribuée à un candidat pris au hasard, aura pour espérance $\mathbb{E}(X) = 5,4$ et pour écart-type $\sigma(X) = 2$

   Le responsable du concours veut obtenir une moyenne de 5 avec un écart-type de 1, 5. Ainsi, il veut appliquer une transformation affine à X en lui associant $aX+b$ avec a et b des réels et $a > 0$.

a. Exprimer $\mathbb{E}(aX+b)$ et $\sigma(aX+b)$ en fonction de a et b.

b. En déduire le calcul de a et b.

2 Somme de variables aléatoires

2.1 Activités

Activité 1

Faire les activités 1 et 2 p.400 du manuel Indice.

2.2 Définition

Définition 4

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω d'expérience aléatoire, qui prennent respectivement pour valeurs les réels x_i tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et y_j tels que $1 \leqslant j \leqslant m$, avec n et m entiers naturels.

- La **variable aléatoire somme** $X+Y$ prend toutes les valeurs possibles $x_i + y_j$ avec :

$$1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{et} \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

- Pour tout couple (x_i, y_j) avec $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, on a :

$$\mathbb{P}\left(X+Y = x_i + y_j\right) = \mathbb{P}\left((X = x_i) \text{ et } \left(Y = y_j\right)\right)$$

- Pour déterminer la loi de probabilité de $X+Y$ on détermine pour chaque valeur w prise par $X+Y$ la somme des $\mathbb{P}\left(X+Y = x_i + y_j\right)$ tels que $x_i + y_j = w$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

  En pratique, on peut utiliser un tableau à double entrée comme dans l'exemple ci-dessous où les valeurs de $X = Y$ sont notées en gras :

X \ Y	1	2	3	Loi de X
1	0,08 (**2**)	0,17 (**3**)	0,14 (**4**)	0,39
2	0,25 (**3**)	0,18 (**4**)	0,18 (**5**)	0,61
Loi de Y	0,33	0,35	0,32	1

  On en déduit la loi de probabilité de la somme $X+Y$:

k	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X+Y=k)$	$0,08$	$0,17+0,25=0,42$	$0,18+0,14=0,32$	$0,18$

Capacité 4 ***Déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires plus simples, capacité 1 p. 403 du manuel indice***

Agathe lance deux pièces de monnaie, l'une de 1 € et l'autre de 2 €
X est la variable aléatoire qui vaut 1 si elle obtient Pile avec la pièce de 1 € et 0 sinon.
Y est la variable aléatoire qui vaut 2 si elle obtient Pile avec la pièce de 2 € et 1 sinon.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Compléter le tableau ci-contre et en déduire la loi de probabilité de $X+Y$.

X \ Y	1	2	Loi de X
0	...	...	...
1	...	...	...
Loi de Y	...	...	...

2.3 Propriétés

Définition 5

1. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω d'expérience aléatoire, qui prennent respectivement pour valeurs les réels x_i tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et y_j tels que $1 \leqslant j \leqslant m$, avec n et m entiers naturels.

   X et Y sont **indépendantes** si pour tout couple (x_i, y_j) de valeurs possibles pour X et Y, on a :

$$\mathbb{P}\big((X = x_i) \text{ et } \big(Y = y_j\big)\big) = \mathbb{P}\big(X = x_i\big) \times \mathbb{P}\big(Y = y_j\big)$$

2. Des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n définies sur une série d'épreuves indépendantes (le résultat d'une épreuve ne dépend pas des autres), sont **mutuellement indépendantes** si pour toute liste de valeurs $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de valeurs possibles pour la liste de variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, on a :

$$\mathbb{P}\big((X_1 = x_1) \text{ et } (X_2 = x_2) \text{ et } \dots \text{ et } (X_n = x_n)\big) = \mathbb{P}\big(X_1 = x_1\big) \times \mathbb{P}\big(X_2 = x_2\big) \times \dots \times \mathbb{P}\big(X_n = x_n\big)$$

⚠ L'*indépendance deux à deux* de variables aléatoires n'entraîne pas leur *indépendance mutuelle* (pour $n \geqslant 3$) mais dans le cadre du programme de terminale nous ne ferons pas de distinction et utiliserons parfois *indépendants* pour *mutuellement indépendants*. La justification de l'indépendance de deux variables aléatoires et de l'indépendance mutuelle de n variables sont hors programme.

Propriété 2 ***Linéarité de l'espérance et de la variance***

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers fini Ω d'expérience aléatoire, qui prennent respectivement pour valeurs les réels x_i tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et y_j tels que $1 \leqslant j \leqslant m$, avec n et m entiers naturels.

1. L'espérance d'une somme de variables aléatoires $X+Y$ est toujours égale à la somme de leurs espérances, que X et Y soient indépendantes ou non :

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

2. Si on a deux variables aléatoires X et Y **indépendantes** alors la variance de leur somme $X+Y$ est

égale à la somme de leurs variances :

$$\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$$

Capacité 5 ***Calculer l'espérance et d'une variable aléatoire avec la propriété de linéarité, capacité 2 p. 403 du manuel Indice***

1. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur univers fini Ω d'expérience aléatoire.

On sait que $\mathbb{E}(X)=3$ et $\mathbb{E}(Y)=4$.

Déterminer l'espérance des variables aléatoires :

$X+Y$, $X+Y+1$, $X-Y$, $X+X$, $\dfrac{1}{3}X+\dfrac{1}{2}Y$ et $aX+(1-a)Y$ où a est un réel.

2. Soit S_n la variable aléatoire qui représente le nombre de piles obtenus lorsqu'on lance une pièce équilibrée n fois.

a. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie une réalisation de S_n :

```python
from random import randint

def lancer():
    #renvoie 1 pour pile et 0 pour face (pièce équilibrée)
    return randint(0, 1)

def S(n):
    compteur = 0
    for k in range(n):
        compteur = ......
    return compteur
```

b. Déterminer l'espérance de S_n.

Capacité 6 ***Calculer la variance d'une variable aléatoire en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes***

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un univers fini Ω d'expérience aléatoire.

On admet que si X et Y sont indépendantes alors pour tous réels a, b, c et d, les variables aléatoires $aX+b$ et $cY+d$ sont indépendantes.

On sait que $\mathbb{V}(X)=3$ et $\mathbb{V}(Y)=4$.

Déterminer la variance des variables aléatoires :

$X+Y$, $X+Y+1$, $X-Y$, $X+X$, $\dfrac{1}{3}X+\dfrac{1}{2}Y$ et $aX+(1-a)Y$ où a est un réel.

2. Soit S_n la variable aléatoire qui représente le nombre de piles obtenus lorsqu'on lance une pièce équilibrée n fois.

Déterminer la variance de S_n.

3 Échantillon de taille n d'une loi de probabilité

3.1 Définition

Définition 6

Soit n un entier naturel non nul.
Un **échantillon** d'une loi de probabilité est une liste $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de n variables aléatoires **indépendantes** et **identiques** qui suivent toutes cette loi.

Capacité 7 ***Simuler un échantillon d'une loi de probabilité***

On dispose d'une urne qui contient des boules indiscernables au toucher : trois sont numérotées 0, deux sont numérotées 1 et une est numérotée 2.
Y est la variable aléatoire qui donne le numéro d'une boule tirée dans cette urne.
Les codes Python de cette capacité sont disponibles dans cette activité Capytale.

1. Déterminer la loi de probabilité de Y, son espérance et sa variance.
2. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle simule une réalisation de Y :

```
from random import randint

def Y():
    alea = randint(1, 6)
    if alea <= 3:
        return .........
    elif alea <= 5:
        return .........
    else:
        return ........
```

3. Soit n un entier naturel non nul, compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie un échantillon de taille n de la loi suivie par la variable aléatoire Y :

```
def echantillon_Y(n):

    return [.................. for k in range(n)]
```

4. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire moyenne $M_n = \dfrac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$ où $(Y_1, X_2, \ldots, Y_n)$ est un échantillon de taille n de la loi suivie par la variable aléatoire Y :

```
def moyenne_Y(n):

    echantillon = echantillon_Y(n)

    somme = 0
```

```
    for resultat in echantillon:
        somme = somme + ............
    return .......................
```

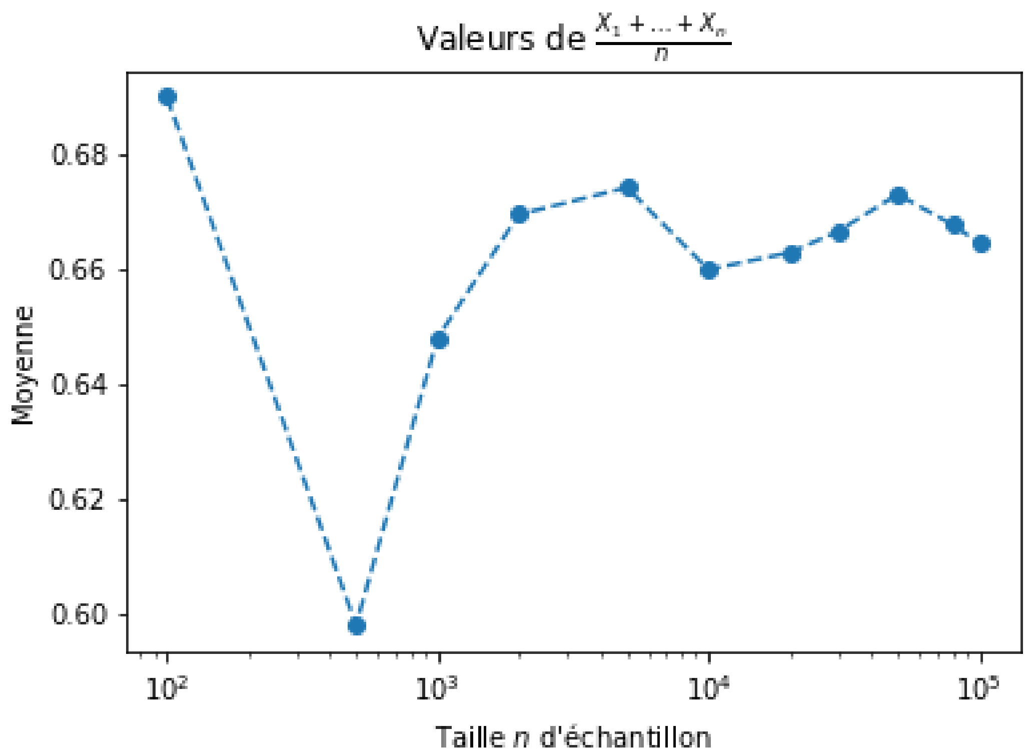
5. On a réalisé un graphique semi-logarithmique de valeurs de la variable aléatoire moyenne M_n pour des tailles n d'échantillon croissantes.

Comment sont repérées les tailles en abscisse?

Quelle conjecture peut-on faire sur les valeurs de M_n lorsque n est grand?

```
def graphique_moyenne_Y_semilog(liste_taille):
    liste_moyenne = [moyenne_Y(n) for n in liste_taille]
    plt.semilogx(liste_taille,liste_moyenne,ls='--',marker='o')
    plt.xlabel(r"Taille $n$ d'échantillon")
    plt.ylabel('Moyenne')
    plt.title(r'Valeurs de $\frac{X_{1}+ \ldots +X_{n}}{n}$')
    plt.savefig('graphique_moyennes.png')
    plt.show()

graphique_moyenne_Y_semilog([100, 500, 1000, 2000, 5000, 10000,
     20000, 30000, 50000, 80000, 100000])
```



6. Avec le code ci-dessous, on a représenté les variances approchées à partir d'échantillons de taille 1000 pour les variables aléatoires moyennes M_n avec n dans la liste $(1, 2, 4, 8, 16)$.

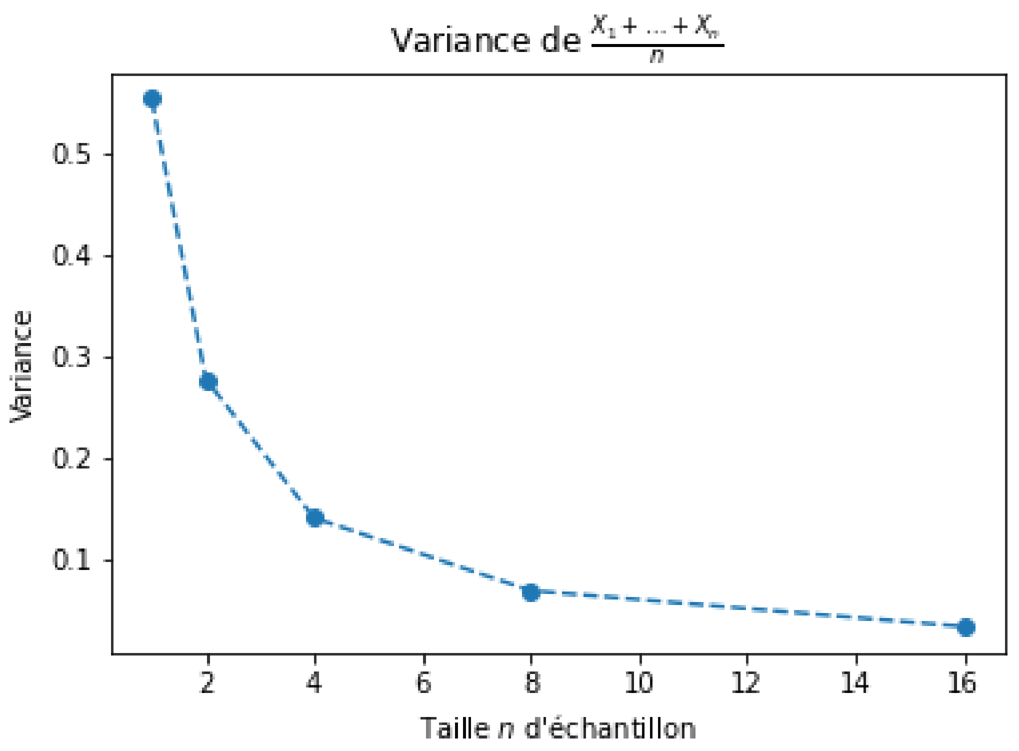
Quelle conjecture peut-on faire sur l'évolution de la variance de M_n en fonction de n?

```
def variance(echantillon):
    """Calcule la variance d’un échantillon (formule de Konig)"""
    somme_carre = 0
    somme = 0
    for resultat in echantillon:
        somme_carre = somme_carre + resultat ** 2
        somme = somme + resultat
    return somme_carre/len(echantillon) - (somme/len(echantillon))
         ** 2

def variance_echantillon_moyenne_Y(n, m):
    return variance([moyenne_Y(n) for k in range(m)])

def graphique_variance_moyenne_Y(liste_taille):
    liste_variance = [ variance_echantillon_moyenne_Y(n, 10000) for
         n in liste_taille]
    plt.plot(liste_taille, liste_variance, ls=’--’, marker=’o’)
    plt.show()

graphique_variance_moyenne_Y([2 ** k for k in range(0, 5)])
```



3.2 Somme d'un échantillon et application à la loi binomiale

Définition 7

Soit une variable aléatoire X.
Soit n un entier naturel non nul et un **échantillon** de taille n, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de la loi suivie par X.
La **somme** de cet échantillon est la variable aléatoire :

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Propriété 3

Soit n un entier naturel non nul et S_n la somme d'un **échantillon** de taille n de la loi suivie par une variable aléatoire X.

1. $\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X)$.
2. $\mathbb{V}(S_n) = n\mathbb{V}(X)$.
3. $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$.

Démonstration ***Au programme***

1) et 2) Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la propriété :
$\mathcal{P}_n$: " Pour un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la loi X
on a $E(S_n) = n\,E(X)$ et $V(S_n) = n\,V(X)$ "

Initialisation : $E(X_1) = E(X)$ et $V(X_1) = V(X)$
donc $\mathcal{P}_1$ vraie

Hérédité : Soit un entier $n \geq 1$ et un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ de la loi X
Par hypothèse de récurrence, on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie et donc :
$E(S_n) = n\,E(X)$ et $V(S_n) = n\,V(X)$

Or $S_{n+1} = S_n + X_n$ donc $E(S_{n+1}) = E(S_n) + E(X_{n+1})$
$E(S_{n+1}) = n\,E(X) + E(X) = (n+1)\,E(X)$
De plus S_n et X_{n+1} indépendants (lemme des coalitions, admis)
donc $V(S_n + X_{n+1}) = V(S_n) + V(X_{n+1}) = n\,V(X) + V(X) = (n+1)\,V(X)$
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

Conclusion : La propriété $\mathcal{S}_n$ est initialisée et héréditaire donc elle est vraie par récurrence pour tout entier $n \geq 1$.

3) De $V(S_n) = nV(X)$

on déduit immédiatement que :

$$\sigma(S_n) = \sqrt{nV(X)} = \sqrt{n}\,\sigma(X)$$

Propriété 4

Soit n un entier naturel non nul et p un réel entre 0 et 1.
Une variable aléatoire S_n, qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ de paramètres n et p, est la somme $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ d'un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p.

1. $\mathbb{E}(S_n) = np$.
2. $\mathbb{V}(S_n) = np(1-p)$.
3. $\sigma(S_n) = \sqrt{np(1-p)}$.

Démonstration ***Au programme***

On admet qu'une variable aléatoire S_n suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ est la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p.
Une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p a :

- pour espérance $\mathbb{E}(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$;
- pour variance $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1^2 \times p + 0^2 \times (1-p) - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$

En appliquant la propriété précédente, il vient : $\mathbb{E}(S_n) = np$, $\mathbb{V}(S_n) = np(1-p)$ et donc $\sigma(S_n) = \sqrt{np(1-p)}$.

Capacité 8 ***Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples, capacité 3 p. 405 du manuel Indice***

Source : *« Visa pour la prépa » de Guillaume Connan.*
On considère 6 dés à six faces numérotées de 1 à 6, cinq étant équilibrés. Le dernier est pipé de sorte que la probabilité de chaque face est proportionnelle à sa valeur.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire donnant le résultat du dé truqué lorsqu'on le lance.
2. On réalise n tirages successifs et indépendants d'un dé parmi six.
   a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire donnant le nombre fois où on a tiré le dé truqué ?
   b. Combien de tirages doit-on effectuer pour que la probabilité d'avoir obtenu le dé truqué parmi ceux tirés soit supérieure ou égale à 0,5 ?

3.3 Moyenne d'un échantillon

Définition 8

Soit une variable aléatoire X.
Soit n un entier naturel non nul et un **échantillon** de taille n, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de la loi suivie par X.
La **moyenne** de cet échantillon est la variable aléatoire :

$$M_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Propriété 5

Soit n un entier naturel non nul et M_n la moyenne d'un **échantillon** de taille n de la loi suivie par une variable aléatoire X.

1. $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X)$. **2.** $\mathbb{V}(M_n) = \dfrac{\mathbb{V}(X)}{n}$. **3.** $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

Démonstration

Soit un entier $n \geq 1$ et $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon d'une loi X.

$M_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$ par définition

1) $E(M_n) = \frac{1}{n} E(X_1 + X_2 + \dots X_n) = \frac{1}{n} \times n E(X) = E(X)$
par linéarité de l'espérance et la propriété 3

2) $V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$
puis $V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times n V(X) = \frac{1}{n} V(X)$ d'après la propriété 3

3) On en déduit que $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma(X)$

Corollaire

Soit n un entier naturel non nul, p un réel entre 0 et 1 et une variable aléatoire S_n, qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ de paramètres n et p.

1. $\mathbb{E}\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = p$. **2.** $\mathbb{V}\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{p(1-p)}{n}$. **3.** $\sigma\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$.

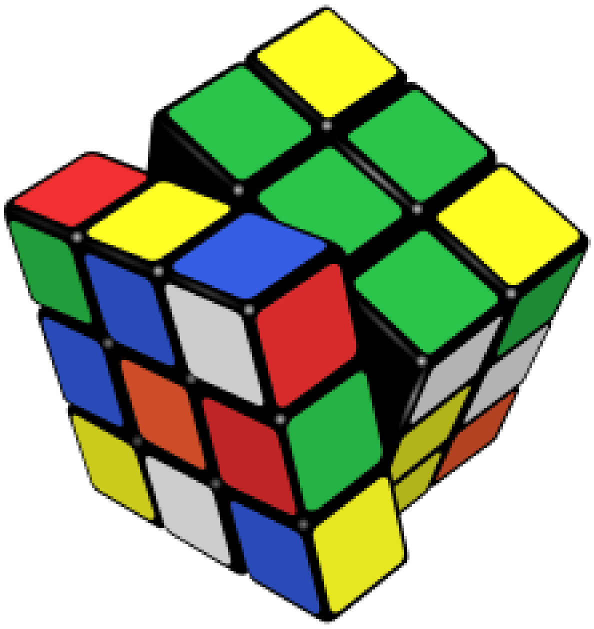
Capacité 9 ***Utiliser la somme et la moyenne d'un échantillon de taille n, capacité 4 p. 405 du manuel Indice***

Chaque jour, Erno résout une fois le Rubik's Cube. X est l'écart, en secondes, entre le temps qu'il réalise et son meilleur temps. Voici la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	10	20
$\mathbb{P}(X=k)$	$0,5$	$0,25$	$0,1$	$0,1$	$0,05$

1. Déterminer l'espérance et l'écart-type de l'écart quotidien moyen sur une dizaine de jours.

2. Reprendre les calculs précédents mais sur 20 puis trente puis cinquante jours. Que peut-on remarquer ?



Auteur : *Booyabazooka ;* *Licence :* *Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported*

Table des matières