Partie A : Un peu d'histoire

Henry Briggs (1561-1630) est le co-inventeur, avec son ami John Neper, des logarithmes. Briggs compléta et dressa la table des logarithmes des entiers, des sinus et des tangentes, avec 14 décimales dans son ouvrage *Arithmetica Logarithmica*.

Partie B : Déroulement et programmation de l'algorithme

On donne ci-dessous un extrait de *l'Introduction à l'analyse infinitésimale* où Leonhard Euler 1707-1783 explique la méthode utilisée par Briggs pour calculer une valeur approchée du logarithme décimal de 5. On rappelle que le **logarithme décimal** d'un nombre strictement positif x est noté $\log(x)$ et qu'il est proportionnel au logarithme népérien $\ln(x)$ par la relation $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Soit la baſe logarithmique $a = 10$, qui eſt celle des tables ordinaires, & propoſons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre eſt renfermé entre les limites 1 & 10, dont les logarithmes ſont 0 & 1, on procédera de la maniere ſuivante à l'extraction des racines, & on continuera les opérations juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à des limites, qui ne different plus du nombre propoſé 5.

$A =$ 1,000000 ;	$lA =$ 0, 0000000	ſoit
$B =$ 10,000000 ;	$lB =$ 1, 0000000 ;	$C = \sqrt{AB}$
$C =$ 3,162277 ;	$lC =$ 0, 5000000 ;	$D = \sqrt{BC}$
$D =$ 5,623413 ;	$lD =$ 0, 7500000 ;	$E = \sqrt{CD}$
$E =$ 4,216964 ;	$lE =$ 0, 6250000 ;	$F = \sqrt{DE}$
$F =$ 4,869674 ;	$lF =$ 0, 6875000 ;	$G = \sqrt{DF}$
$G =$ 5,232991 ;	$lG =$ 0, 7187500 ;	$H = \sqrt{FG}$
$H =$ 5,048065 ;	$lH =$ 0, 7031250 ;	$I = \sqrt{FH}$
$I =$ 4,958069 ;	$lI =$ 0, 6 53125 ;	$K = \sqrt{HI}$
$K =$ 5,002865 ;	$lK =$ 0, 6992187 ;	$L = \sqrt{IK}$
$L =$ 4,980416 ;	$lL =$ 0, 6972656 ;	$M = \sqrt{KL}$
$M =$ 4,991627 ;	$lM =$ 0, 6982421 ;	$N = \sqrt{KM}$
$N =$ 4,997242 ;	$lN =$ 0, 6987304 ;	$O = \sqrt{KN}$
$O =$ 5,000052 ;	$lO =$ 0, 6989745 ;	$P = \sqrt{NO}$
$P =$ 4,998647 ;	$lP =$ 0, 6988525 ;	$Q = \sqrt{OP}$
$Q =$ 4,999350 ;	$lQ =$ 0, 6989135 ;	$R = \sqrt{OQ}$
$R =$ 4,999701 ;	$lR =$ 0, 6989440 ;	$S = \sqrt{OR}$
$S =$ 4,999876 ;	$lS =$ 0, 6989592 ;	$T = \sqrt{OS}$
$T =$ 4,999963 ;	$lT =$ 0, 6989668 ;	$V = \sqrt{OT}$
$V =$ 5,000008 ;	$lV =$ 0, 6989707 ;	$W = \sqrt{TV}$
$W =$ 4,999984 ;	$lW =$ 0, 6989687 ;	$X = \sqrt{WV}$
$X =$ 4,999997 ;	$lX =$ 0, 6989697 ;	$Y = \sqrt{VX}$
$Y =$ 5,000003 ;	$lY =$ 0, 6989701 ;	$Z = \sqrt{XY}$
$Z =$ 5,000000 ;	$lZ =$ 0, 6989700 ;	

Ainſi, en prenant des moyennes proportionnelles, on eſt parvenu à trouver $Z = 5,000000$, à quoi répond le logarithme cherché 0,698970, en ſuppoſant la baſe logarithmique $= 10$. Par conſéquent $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$ à-peu-près. C'eſt de cette maniere que BRIGGS & ULACQ ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.

Les colonnes de gauche et du milieu se complètent selon l'algorithme suivant :

☞ **Étape 1 : initialisation** On initialise les deux premières lignes avec deux nombres $A = 1$ et $B = 10$, qui encadrent 5, et leurs logarithmes décimaux $lA = 0$ et $lB = 1$. On a bien $\log(10) = \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$ d'où $lB = 1$.

☞ **Étape 2 : boucle**

On répète en boucle les instructions suivantes pour remplir les lignes suivantes.

- **Colonne de gauche :** On prend les deux dernières valeurs de la colonne de gauche qui encadrent 5 et on calcule leur moyenne géométrique qu'on affecte comme nouvelle valeur de la colonne de gauche. Quelques exemples :
  - pour calculer C en la troisième ligne, on a sélectionné A et B, puis calculé leur moyenne géométrique $\sqrt{AB}$;
  - pour calculer G en septième ligne, on a sélectionné D et F, puis calculé leur moyenne géométrique $\sqrt{DF}$;
  - pour calculer V en vingt cinquième ligne, on a sélectionné O et T, puis calculé leur moyenne géométrique $\sqrt{OT}$.

- **Colonne du milieu :** On sélectionne les mêmes lignes que pour le calcul de la nouvelle valeur de la colonne de gauche, mais pour la valeur en colonne du milieu on calcule la moyenne arithmétique des valeurs du milieu des lignes sélectionnées. Quelques exemples :
  - pour calculer lC en la troisième ligne, on a sélectionné lA et lB, puis calculé leur moyenne arithmétique $\dfrac{lA+lB}{2}$;
  - pour calculer lG en septième ligne, on a sélectionné lD et lF, puis calculé leur moyenne arithmétique $\dfrac{lD+lF}{2}$;
  - pour calculer lV en vingt cinquième ligne, on a sélectionné lO et lT, puis calculé leur moyenne arithmétique $\dfrac{lO+lT}{2}$.

☞ **Étape 3 : fin** On peut démontrer que la suite formée par les valeurs de la colonne de gauche converge vers 5 et que la suite des valeurs de la colonne du milieu converge vers $\log(5)$. On peut choisir comme critère d'arrêt de boucle un seuil sur l'écart entre la valeur de la colonne de gauche et 5 ou l'écart entre deux valeurs successives de la colonne du milieu.

1. Expliquer le calcul des valeurs C et lC dans l'extrait de l'explication d'Euler.

Démontrer que la valeur de lC est égale au logarithme décimal de la valeur de C

2. Expliquer le calcul des valeurs R et lR dans l'extrait de l'explication d'Euler.

On admet que lO et lQ contiennent respectivement les logarithmes décimaux de O et Q. Démontrer que la valeur de lR est égale au logarithme décimal de R.

3. Quel type de raisonnement permettrait de démontrer que pour chaque ligne, la valeur de la colonne du milieu est le logarithme décimal de la valeur de la colonne de gauche ? On admet ce résultat pour la suite.

4. On peut appliquer l'algorithme de Briggs pour calculer une valeur approchée du logarithme décimal de x pour tout réel x compris entre 1 et 10. Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour que `briggs(x, epsilon)` retourne un encadrement de $\log(x)$ d'amplitude `epsilon` par cet algorithme.

Les variables `a` et `b` sont les valeurs successives de la colonne de gauche encadrant x, tandis que `loga` et `logb` sont les valeurs correspondantes de la colonne du milieu dans l'explication d'Euler.

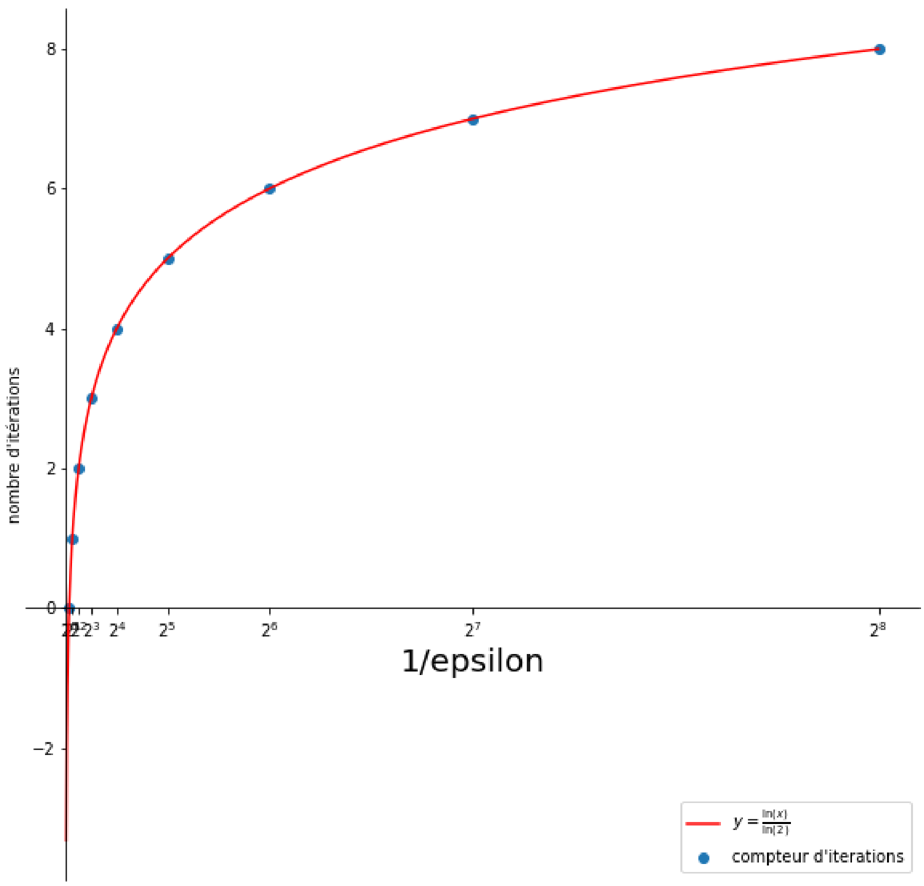
On admet que pour $1 \leqslant x \leqslant 10$, `a` et `b` convergent vers x, tandis que `loga` et `logb` convergent vers $\log(x)$.

```python
from math import sqrt

def moyenne_geometrique(c, d):
    return sqrt(c * d)

def moyenne_arithmetique(c, d):
    return (c + d) / 2

def briggs(x, epsilon):
    a = 1
    b = 10
    loga = 0
    logb = 1
    while logb - loga > epsilon:
```

```
        mg = moyenne_geometrique(a, b)
        if mg <= x:
            a = ..........
            loga = ..........
        else:
            b = ..........
            logb = ..........
    return (loga, logb)
```

5. D'après le graphique ci-dessous, quelle conjecture peut-on faire sur l'ordre de grandeur du nombre d'itérations de la boucle `while` pour `epsilon` égal à $\frac{1}{2^n}$ avec n variant entre 0 et 8.

Cette conjecture peut-elle être validée ? Justifier.



Partie C : Démonstration de la convergence dans un cas particulier

On fixe $x = 2$. On va démontrer que les variables `a` et `b` (colonne de gauche de l'explication d'Euler) convergent vers $x = 2$ et que les variables `loga` et `logb` (colonne du milieu de l'explication d'Euler) convergent vers

$\log(x) = \log(2)$.
Soit (u_n) la suite des valeurs successives de la variable `a` et soit (v_n) la suite des valeurs successives de la variable `b`.
Ces deux suites vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{u_n v_n} \text{ si } \sqrt{u_n v_n} \leqslant x \\ u_n \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_0 = 10 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \begin{cases} v_n \text{ si } \sqrt{u_n v_n} \leqslant x \\ \sqrt{u_n v_n} \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Soit a et b deux réels strictement positifs, tels que $a < b$, démontrer que :

$$a < \sqrt{ab} < b \tag{1}$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_n \leqslant 2 \leqslant v_n \leqslant 10 \tag{2}$$

b. En utilisant l'inégalité (1), démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

c. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Soit n un entier naturel, on raisonne par disjonction des cas :

a. **Premier cas :** On suppose que $\sqrt{u_n v_n} \leqslant 2$.

- Démontrer que $v_{n+1} - u_{n+1} = \sqrt{v_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) = \dfrac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}}(v_n - u_n)$.
- En déduire que : $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{u_n v_n} + u_n}(v_n - u_n)$.
- En utilisant l'inégalité (2) , en déduire que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{2}{\sqrt{2}+1}(v_n - u_n) \tag{3}$$

b. **Second cas :** On suppose que $\sqrt{u_n v_n} > 2$.

- Démontrer que $v_{n+1} - u_{n+1} = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) = \dfrac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}}(v_n - u_n)$.
- En déduire que : $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{2 + u_n}(v_n - u_n)$.
- En utilisant l'inégalité (2) , en déduire que :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}(v_n - u_n) \tag{4}$$

4. **a.** Déduire des inégalités (3) et (4) que pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{4}{5}(v_n - u_n) \tag{5}$$

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\frac{4}{5}\right)^n (v_0 - u_0) \tag{6}$$

c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ.

d. En utilisant l'inégalité (2), démontrer que $\ell = 2$.

e. En déduire que les suites $\big(\log(u_n)\big)$ et $\big(\log(v_n)\big)$ convergent vers $\log(2)$.
Ainsi on a démontré que dans l'algorithme de Briggs, les valeurs des variables `a` et `b` convergent vers l'entrée $x = 2$ et que les valeurs des variables `loga` et `logb` convergent vers $\log(x)$.