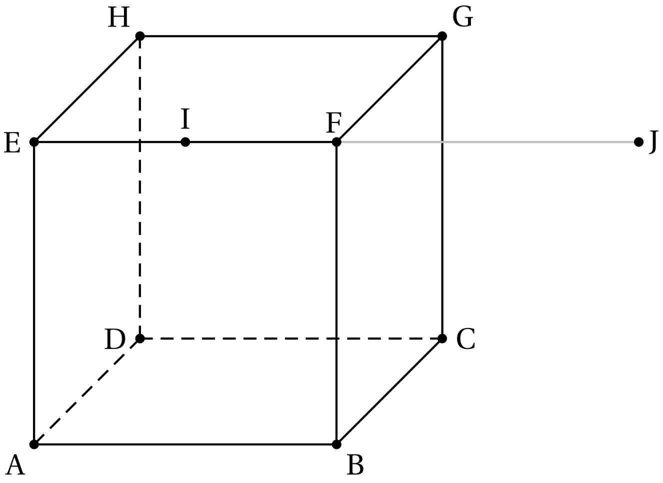
Exercice 1 *Sujet zéro 2021*

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.

b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.

c. Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.

2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{6} ; \frac{5}{6}\right)$.

Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$$

où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Calculer le volume de la pyramide FBGI.

b. En déduire l'aire du triangle BGI.

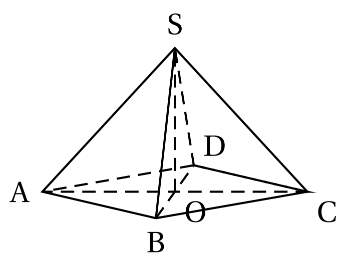
Exercice 2 *Bac S Amérique du Sud Novembre 2016*

Partie A : un calcul de volume sans repère

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.

Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm. On note O le centre du carré ABCD.

On admettra que OS = OA.



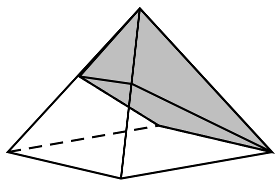
1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).
2. En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD.

Partie B : dans un repère
On considère le repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OB},\,\overrightarrow{OS}\right)$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].
   a. Justifier que $\overrightarrow{n}\,(1\,;\,1\,;\,-3)$ est un vecteur normal au plan (PQC).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQC).
2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).
   a. Donner une représentation paramétrique de la droite (SH).
   b. Calculer les coordonnées du point H.
   c. Montrer alors que la longueur SH, en unité de longueur, est $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.
3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$

   Calculer le volume de la pyramide SPQCD, en unité de volume.

Partie C : partage équitable
Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.
Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :
« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».



Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.
Est-ce le cas ? Justifier la réponse.

Exercice 3 *Polynésie Septembre 2017*

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'une tumeur composée de cellules cancéreuses.
Pour atténuer le risque de récidive, le médecin peut proposer de compléter l'opération par une chimiothérapie. Lors d'un traitement par chimiothérapie en intraveineuse, la concentration du médicament dans l'organisme, exprimée en μmol.L^{-1}, peut être modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction c définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$c(t)=\frac{D}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{80}t}\right)$$

où

- D est un réel positif qui représente le débit d'écoulement du médicament dans la perfusion, exprimé en micromole par heure ;

- k est un réel positif qui représente la clairance du patient, exprimée en litre par heure.

La clairance traduit la capacité interne du patient à éliminer plus ou moins vite le médicament de son organisme. Elle est propre à chaque individu et est inconnue au début du traitement. Il est nécessaire de la déterminer afin que le médecin puisse adapter le traitement en ajustant le débit D.

1. Détermination de la clairance

Afin de déterminer la clairance, on effectue les mesures suivantes. On règle le débit de la perfusion sur 112 μmol.h^{-1} ; au bout de 6 heures, on prélève un échantillon de sang du patient et on mesure la concentration du médicament : elle est égale à 6,8 μmol.L^{-1}.

a. Justifier que la clairance k du patient est solution de l'équation

$$112\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}k}\right)-6,8k=0.$$

b. Démontrer que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

c. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution. Interpréter ce résultat.

2. Réglage du débit

a. Déterminer la limite ℓ de la fonction c en $+\infty$ en fonction du débit D et de la clairance k.

b. La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite ℓ.
Pour que le traitement soit efficace sans devenir toxique, cette concentration limite doit être de 16 μmol.L^{-1}.
En déduire le débit D, à régler par le médecin, lorsque la clairance du patient est de $5,85$ L.h^{-1}.

Exercice 4

On se place dans un repère orthonormé de l'espace.
Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(2\,;\,-5\,;\,3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,2\,;\,1)$.
Déterminer la distance du point $B(-1\,;\,2\,;\,-4)$ à la droite $\mathscr{D}$.

Corrigé 1

Spécialité sujet 0, corrigé de l'APMEP

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

Les sommets du cube ont pour coordonnées : A $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, D $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, E $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, F $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, H $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et G $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. **a.**
- Le point I est le milieu de [EF] donc I a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$.
- Le point J est le symétrique de E par rapport à F, donc J a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.

b. On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

c.
- Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (BGI).
- $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = -1+0+1=0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$.
- $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 0-1+1=0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc il est normal au plan (BGI).

d.
- Le vecteur $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI) donc le plan (BGI) a une équation de la forme $2x-y+z+d=0$.
- Le point B appartient au plan (BGI) donc les coordonnées de B vérifient l'équation du plan; donc $2x_{\text{B}}-y_{\text{B}}+z_{\text{B}}+d=0$, ce qui équivaut à $2-0+0+d=0$, ce qui veut dire que $d=-2$.

Donc une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x-y+z-2=0$.

2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a. La droite d est orthogonale au plan (BGI), et $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI), donc $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur directeur de la droite d.

Le point F appartient à la droite d donc la droite d est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DJ}$ soient colinéaires.

$$\overrightarrow{FM}\text{ et }\overrightarrow{DJ}\text{ colinéaires} \iff \overrightarrow{FM}=t.\overrightarrow{DJ} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t\times 2\\ y-0 &=& t\times(-1)\\ z-1 &=& t\times 1\end{array}\right.$$

Donc la droite d a pour équation $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y &=& -t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$

b. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{5}{6}\right)$.

- Pour prouver que $\text{L} \in d$, on cherche t pour que $\left\{\begin{array}{rcl}\frac{2}{3} &=& 1+2t\\ \frac{1}{6} &=& -t\\ \frac{5}{6} &=& 1+t\end{array}\right.$

  On trouve $t = -\frac{1}{6}$ donc $\text{L} \in d$.
- Le plan (BGI) a pour équation $2x - y + z - 2 = 0$; or $2x_\text{L} - y_\text{L} + z_\text{L} - 2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 2 = 0$, donc $\text{L} \in (\text{BGI})$.

Le point L est donc le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3. **a.** La pyramide FBGI a pour base le triangle rectangle FBG, et pour hauteur IF.

- $\text{IF} = \frac{1}{2}$
- Le triangle rectangle FBG a pour aire $\frac{\text{FG} \times \text{FB}}{2} = \frac{1}{2}$.

Le volume de la pyramide FBGI est donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

b. La droite d est orthogonale au plan (BGI) et coupe ce plan en L. Le point F appartient à la droite d, donc on peut dire que la distance FL est la distance du point F au plan (BGI), autrement dit c'est la hauteur de la pyramide FBGI dont le triangle BGI est la base.

$\text{FL}^2 = \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{6} - 1\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ donc $\text{FL} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

On appelle $\mathcal{A}$ l'aire du triangle BGI. On exprime le volume de la pyramide FBGI :

$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{FL} \times \mathcal{A} \iff \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \mathcal{A} \iff \frac{3 \times \sqrt{6}}{12} = \mathcal{A} \iff \mathcal{A} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

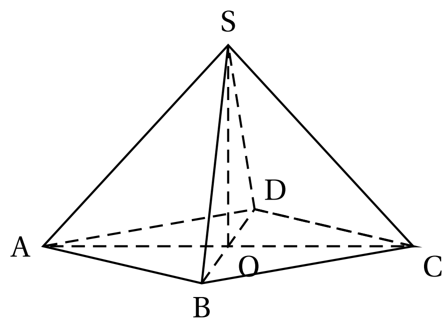
L'aire du triangle BGI est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Corrigé 2

Amérique du Sud Novembre 2016, corrigé de l'APMEP

Partie A : Un calcul de volume sans repère

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.
Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm.
On note O le centre du carré ABCD.
On admettra que OS = OA.



1. On sait que O est le centre du carré ABCD donc OA = OC.

On sait que la pyramide SABCD est équilatère à base carrée donc SA = SC.

On se place dans le triangle SAC.

SA = SC donc le triangle SAC est isocèle.

OA = OC donc O est le milieu de AC et donc (SO) est la médiane issue de S du triangle SAC.

Comme le triangle SAC est isocèle de sommet principal S, la médiane issue de S est aussi une médiatrice; on en déduit que (SO) est perpendiculaire à (AC).

En se plaçant dans le triangle (SBD), on démontre de même que (SO) est perpendiculaire à (BD).

La droite (SO) est perpendiculaire à deux droites sécantes (AC) et (BD) du plan (ABC) donc la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

2. Le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

- La base de la pyramide est le carré ABCD dont les diagonales mesurent 24 cm.
  Dans le triangle ABC isocèle rectangle en B on a, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ce qui équivaut à $2AB^2 = 24^2$ ou $AB^2 = 288$.
  L'aire du carré ABCD est $AB^2 = 288$ cm^2.
- D'après le texte, SO = OA donc $SO = \dfrac{24}{2} = 12$.

Le volume de la pyramide est donc $V = \dfrac{288 \times 12}{3} = 1152$ cm^3.

Partie B : Dans un repère

On considère le repère orthonormé $\left(O~;~\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}\right)$.
On peut donc dire que les points O, A, B et S ont pour coordonnées respectives (0 ; 0 ; 0), (1 ; 0 ; 0), (0 ; 1 ; 0) et (0 ; 0 ; 1).
Comme O est le milieu de AC et de BD, on peut dire que les points C et D ont pour coordonnées respectives (−1 ; 0 ; 0) et (0 ; −1 ; 0).

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments AS et BS.

Donc P et Q ont pour coordonnées respectives $\left(\dfrac{1}{2}~;~0~;~\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(0~;~\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{1}{2}\right)$.

a. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (1 ; 1 ; −3).

- Le vecteur $\overrightarrow{PC}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}~;~0~;~-\dfrac{1}{2}\right)$.
  $\vec{n}.\overrightarrow{PC} = 1 \times \left(-\dfrac{3}{2}\right) + 0 + (-3) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{PC}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{QC}$ a pour coordonnées $\left(-1~;~-\dfrac{1}{2}~;~-\dfrac{1}{2}\right)$.
  $\vec{n}.\overrightarrow{QC} = 1 \times (-1) + 1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + (-3) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{QC}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{QC}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{QC}$ non colinéaires, donc il est normal au plan (QPC).

b. Le plan (QPC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\text{CM}}$ soient orthogonaux.

Si M a pour coordonnées $(x\,;\ y\ ;\ z)$, le vecteur $\overrightarrow{\text{CM}}$ a pour coordonnées $(x+1\,;\ y\ ;\ z)$.

$\overrightarrow{\text{CM}} \perp \overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{\text{CM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff 1\times(x+1)+1\times y-3\times z=0 \iff x+y-3z+1=0$

Le plan (PQC) a pour équation $x+y-3z+1=0$.

2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).

a. La droite (SH) est orthogonale au plan (PQC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est normal au plan (PQC).

La droite (SH) contient le point S de coordonnées (0 ; 0 ; 1).

La droite (SH) a donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& k\\ y &=& k\\ z &=& 1-3k\end{array}\right.$ avec $k\in\mathbb{R}$

b. $\text{H}\in(\text{SH})\cap(\text{PQC})$ donc les coordonnées de H sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& k\\ y &=& k\\ z &=& 1-3k\\ x+y-3z+1 &=& 0\end{array}\right.$

On a donc $k+k-3(1-3k)+1=0 \iff 11k=2 \iff k=\dfrac{2}{11}$.

$1-3k=1-3\times\dfrac{2}{11}=1-\dfrac{6}{11}=\dfrac{5}{11}$

Les coordonnées de H sont donc $\left(\dfrac{2}{11}\ ;\ \dfrac{2}{11}\ ;\ \dfrac{5}{11}\right)$.

c. $\text{SH}^2=\left(\dfrac{2}{11}-0\right)^2+\left(\dfrac{2}{11}-0\right)^2+\left(\dfrac{5}{11}-1\right)^2=\dfrac{4}{11^2}+\dfrac{4}{11^2}+\dfrac{36}{11^2}=\dfrac{44}{11^2}$ donc $\text{SH}=\dfrac{\sqrt{44}}{11}=\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

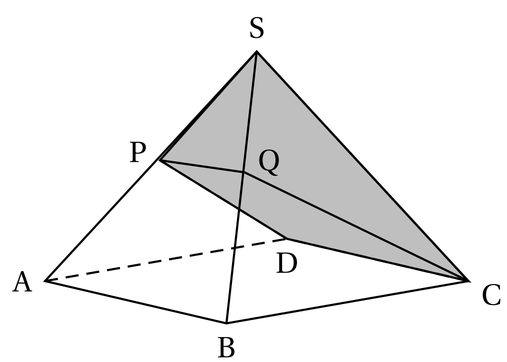
3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$

La pyramide SPQCD a pour base le quadrilatère PQCD et pour hauteur SH; son volume est donc

$$V'=\dfrac{\text{SH}\times\text{aire(PQCD}}{3}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{11}}{11}\times\dfrac{3\sqrt{11}}{8}}{3}=\dfrac{\dfrac{6}{8}}{3}=\dfrac{1}{4}\text{ unité de volume.}$$

Partie B : Partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.
Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :
« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».



Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.
La longueur OA est égale à une unité de longueur et à 12 cm. Donc l'unité de longueur vaut 12 cm et l'unité de volume vaut $12^3 = 1\,728$ cm^3.
Le volume de la pyramide SABCD est égal à 1 152 cm^3.
Le volume de la pyramide SPQCD est égal à 0,25 unité de volume, soit $0,25 \times 1\,728 = 432$ cm^3.
Or $\dfrac{1\,152}{2} = 576 \neq 432$ donc le partage proposé par Fanny n'est pas équitable.

Corrigé 3

Polynésie Septembre 2017, corrigé de l'APMEP

Pour atténuer le risque de récidive, le médecin peut proposer de compléter l'opération par une chimiothérapie. Lors d'un traitement par chimiothérapie en intraveineuse, la concentration du médicament dans l'organisme, exprimée en μmol.L^{-1}, peut être modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction c définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$c(t) = \frac{D}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{80}t}\right)$$

où
- D est un réel positif qui représente le débit d'écoulement du médicament dans la perfusion, exprimé en micromole par heure;
- k est un réel positif qui représente la clairance du patient, exprimée en litre par heure.

1. Afin de déterminer la clairance, on effectue les mesures suivantes. On règle le débit de la perfusion sur 112 μmol.h^{-1} ; au bout de 6 heures, on prélève un échantillon de sang du patient et on mesure la concentration du médicament : elle est égale à 6,8 μmol.L^{-1}.

a. $c(6) = 6,8 \iff \dfrac{112}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{80}\times 6}\right) = 6,8 \iff 112\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}k}\right) = 6,8k$

$\iff 112\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}k}\right) - 6,8k = 0.$

b. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 112\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right) - 6,8x$.

$f'(x) = 112 \times \dfrac{3}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 6,8 = 8,4\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 6,8$

$f'(x) > 0 \iff 8,4\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 6,8 > 0 \iff \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} > \dfrac{6,8}{8,4} \iff -\dfrac{3}{40}x > \ln\left(\dfrac{6,8}{8,4}\right)$

$\iff x < -\dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{6,8}{8,4}\right)$. On pose $x_0 = -\dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{6,8}{8,4}\right)$; alors $x_0 \approx 2,82$.

$f(0) = 112\left(1 - \mathrm{e}^0\right) - 6,8 \times 0 = 0$; $f(x_0) \approx 2,17$ et $f(10) \approx -8,9 < 0$.

On établit le tableau de variations de f sur $0\,;\,+\infty$ et on place 10 :

x	0		x_0		10		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\approx 2,17$	$\searrow$	$\approx -8,9$	$\searrow$	

D'après le tableau de variations de f, on peut déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $0\,;\,+\infty$.

c. $f(5) \approx 1,02 > 0$ et $f(6) \approx -0,21 < 0$ donc $\alpha \in 5\,;\,6$;
$f(5,8) \approx 0,066 > 0$ et $f(5,9) \approx -0,072 < 0$ donc $\alpha \in 5,8\,;\,5,9$;
$f(5,84) \approx 0,012 > 0$ et $f(5,85) \approx -0,002 < 0$ donc $\alpha \in 5,84\,;\,5,85$;
donc une valeur approchée de cette solution est $5,85$.
Cela signifie que, pour une clairance de 5,85 litres par heure et un débit de 112 μmol.h^{-1}, au bout de 6 heures, la concentration du médicament est de $6,8$ μmol.L^{-1}.

2. **a.** On détermine la limite de $c(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} k>0 \text{ donc } \displaystyle\lim_{t\to+\infty} -\frac{k}{80}t = -\infty \\ \text{on pose } T = -\dfrac{k}{80}t \\ \displaystyle\lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{k}{80}t} = 0 \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \frac{D}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{80}t}\right) = \frac{D}{k}$$

Donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} c(t) = \frac{D}{k}$.

b. La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite ℓ. Pour que le traitement soit efficace sans devenir toxique, cette concentration limite doit être de 16 μmol.L^{-1}.
La limite égale à $\dfrac{D}{k}$ est de 16 μmol.L^{-1} pour une clairance k de $5,85$ L.h^{-1}.
Donc $\dfrac{D}{5,85} = 16$ donc $D = 93,6$ μmol.h^{-1}.

Corrigé 4

Voir capacité 7 du cours