Exercice 1 *Capacité 5 du cours sur la continuité*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}(x^2+2x+2)$.

1. Conjecturer graphiquement les limites aux bornes, le sens de variation, la convexité et les éventuels points d'inflexion de la fonction f.

2. Démontrer ces conjectures.

Exercice 2 *Combinatoire*

Faire l'exercice 99 page 33.

Exercice 3 *Espace*

Dans un repère de l'espace on donne les points $A(3;0;5)$, $B\left(0;-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $C(1;0;2)$.

- Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
- Donner un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC)
- On donne les points $E\left(2;0;\frac{1}{2}\right)$ et $F\left(1;-\frac{3}{2};-1\right)$. Démontrer que la droite (EF) est parallèle au plan (ABC).

Exercice 4 *Espace*

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté en Annexe.
On munit l'espace du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Partie A

1. **a.** Construire sur la figure en Annexe les points I, J et K définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{3}{4}\overrightarrow{EH} \quad \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$$

b. Sans justifier, donner les coordonnées des points I, J et K dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

c. Justifier que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ sont $\left(-1;\frac{1}{2};1\right)$.

d. En déduire une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. Soit L un point du segment $[DC]$. Il existe un réel a appartenant à l'intervalle $[0;1]$ tel que $\overrightarrow{DL} = a\overrightarrow{DC}$.

a. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(a;1;0)$.

b. Démontrer qu'une représentation représentation paramétrique de la droite (KL) est :

$$\begin{cases} x = a + \left(a - \frac{2}{3}\right)u \\ y = 1 + u \\ z = -u \end{cases}, \ u \in \mathbb{R}$$

3. **a.** Démontrer que les points I, J et K ne sont pas alignés et forment un plan.

   b. Démontrer que les droites (KL) et (IJ) sont sécantes si et seulement si $a = \dfrac{1}{3}$.

   c. Que peut-on dire des points I, J, K et L si $a = \dfrac{1}{3}$?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que $a = \dfrac{1}{3}$ et que le point L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;1\,;0\right)$.

1. **a.** Démontrer que le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme.

   b. Le centre O du cube $ABCDEFGH$ est le milieu des diagonales $[BH]$ et $[DF]$.
   Calculer les coordonnées de O.

   c. Le point O est-il aussi le centre du parallélogramme $IKJL$?

2. Soit M le point de coordonnées $\left(1\,;0\,;\dfrac{2}{5}\right)$.

   a. Démontrer que le point M appartient au segment $[BF]$.

   b. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{JI}$ sont coplanaires.

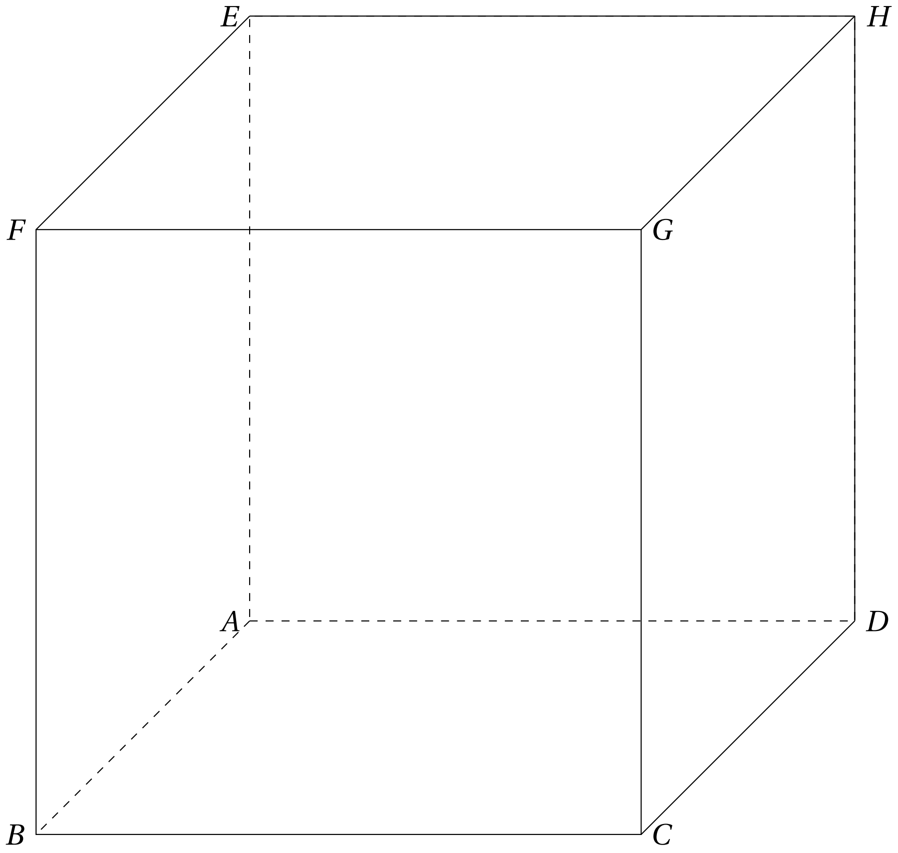
   c. On a démontré que le point M est l'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF).
   Construire le point M sur la figure en Annexe.

3. **a.** Déterminer les coordonnées d'un point N du segment $[DH]$ tel que les droites (KM) et (LN) soient parallèles.

   b. Justifier que les points I, L, N, J, K et M sont coplanaires.

   c. Construire le polygone $ILNJKM$ sur la figure en Annexe : c'est la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK).

ANNEXE



Exercice 5 *Convexité et composition*

Soit u et v deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
On considère la fonction w définie comme la composée de u suivie de v :

$$\text{pour tout réel } x, \quad w(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x))$$

On note u', v', w' les fonctions dérivées premières et u'', v'' et w'' les fonctions dérivées secondes.

1. Soit x un réel, déterminer une expression de $w'(x)$ en fonction de l'indéterminée x et des fonctions u', v' et u.

2. Démontrer que si u et v sont convexes et que v est croissante sur $\mathbb{R}$ alors la fonction composée $w = v \circ u$ est convexe.

Exercice 6 *Devoir Commun Décembre 2019*

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5$ microgrammes par millilitre. Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.
Dans cet exercice on étudie deux modélisations du taux de vasopressine en fonction du temps écoulé après le début d'une hémorragie.

Partie A : modélisation par une suite

Dans cette partie, on modélise le taux de vasopressine dans le sang n minutes après le début d'une hémorragie par le terme u_n de la suite u définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 0,3u_n + 0,5n + 3,5$$

Le taux u_n est exprimé en microgrammes par millilitre.

1. Déterminer le taux de vasopressine dans le sang prévu par ce modèle 1 minute puis 2 minutes après le début de l'hémorragie.

2. **Recopier sur la copie les lignes incomplètes et les compléter** pour que l'algorithme ci-dessous et sa traduction en `Python` retournent le taux de vasopressine prévu par ce modèle au bout de n minutes.

Algorithme

```
Fonction taux(n)
  u ⟵ 2
  Pour k allant de 0 à ...
    u ⟵ ......
  Retourne u
```

Python

```python
def taux(n):
    u = 2
    for k in range(........):
        u = .................
    return u
```

3. **Recopier et compléter** le tableau d'état des variables `k` et `u` si on exécute la fonction avec `n` égal à 2 :

Point d'exécution	Variable `k`	Variable `u`
Juste avant la boucle	Pas définie	2
Fin du premier tour de boucle	0	......
Fin du second tour de boucle	...	......

4. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

5. La suite (u_n) est-elle majorée ? Justifier précisément.

6. Ce modèle d'évolution du taux de vasopressine vous semble-t-il raisonnable ?

Partie B : modélisation par une fonction

On modélise désormais le taux de vasopressine (en microgrammes par millilitre) dans le sang en fonction du temps t (en minutes) écoulé après le début d'une hémorragie par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(t) = 3te^{-\frac{1}{5}t} + 2$$

1. **a.** Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?
   b. Justifier que quinze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.
   c. Déterminer la limite lorsque t tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\frac{1}{5}t}{\mathrm{e}^{\frac{1}{5}t}}$.
   d. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

   Vérifier que pour tout nombre réel t positif, on a :

$$f'(t) = \frac{3}{5}(5-t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t}$$

3. **a.** Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en précisant la limite en $+\infty$).
   b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?
   Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. **a.** Démontrer qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[0\,;\,5]$ telle que $f(t_1) = 2,5$.
   b. On admet qu'il existe une unique valeur t_2 appartenant à $[5\,;\,+\infty[$ vérifiant $f(t_2) = 2,5$.
   Déterminer par balayage des encadrements de t_1 et t_2 d'amplitude 10^{-2}.
   c. Selon ce modèle, pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste-t-il supérieur à 2,5 microgramme par millilitre dans le sang ? Donner une valeur approchée à deux secondes près.

Corrigés

Corrigé 1

Voir https://frederic-junier.github.io/Terminale-Spe-Maths/Continuite/corrige-exemples-cours pdf

Corrigé 2

en classe

Corrigé 3

en classe

Corrigé 4

à venir

Corrigé 5

à venir

Corrigé 6

Devoir Commun Décembre 2019

Partie A : Modélisation par une suite

On rappelle que dans cette partie, on a modélisé le taux de vasopressine dans le sang n minutes après le début d'une hémorragie par le terme u_n de la suite u définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 0,3u_n + 0,5n + 3,5$$

Le taux u_n est exprimé en microgrammes par millilitre.

1. Ici il s'agit de calculer u_1 et u_2 :

Le taux de vasopressine dans le sang 1 minute après le début de l'hémorragie est de :

$$\boxed{u_1 = 0,3u_0 + 0,5 \times 0 + 3,5 = 4,1 \text{ microgrammes par millilitre}}$$

Le taux de vasopressine dans le sang 2 minutes après le début de l'hémorragie est de :

$$\boxed{u_2 = 0,3u_1 + 0,5 \times 1 + 3,5 = 5,23 \text{ microgrammes par millilitre}}$$

Remarque : Pour utiliser une formule du type $u_{n+1} = \ldots$ afin de déterminer la valeur de u_1, on l'applique pour la valeur $n = 0$ (et certainement pas n = 1).

2. L'algorithme ci-dessous et sa traduction en `Python` retournent le taux de vasopressine prévu par ce modèle au bout de n minutes.

Algorithme

```
Fonction taux(n)
  u ⟵ 2
  Pour k allant de 0 à n−1
    u ⟵ 0,3u + 0,5k + 3,5
  Retourne u
```

Python

```python
def taux(n):
    u = 2
    for k in range(0, n):
        u = 0.3*u + 0.5*k + 3.5
    return u
```

Remarques :

a. *Il est très facile d'exécuter le code mentalement pour la valeur $n = 0$. Si la valeur renvoyée n'est pas $2 = u_0$, le code est faux et il faut le corriger.*

b. *La formule de récurrence est $u_{n+1} = 0,3u_n + 0,5n + 3,5$. Attention les valeurs de la suite sont calculées les unes après les autres lors de l'exécution de la boucle dont le compteur est `k` ainsi on n'écrit pas `u = 0.3*u + 0.5*n + 3.5` car `n` ne change pas de valeur au fur et à mesure de l'exécution de la boucle.*

3. Tableau d'état des variables `k` et `u` si on exécute la fonction avec `n` égal à 2 :

Point d'exécution	Variable `k`	Variable `u`
Juste avant la boucle	Pas définie	2
Fin du premier tour de boucle	0	4,1
Fin du second tour de boucle	1	5,23

4. Pour démontrer que la suite (u_n) est croissante, on va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : $u_n \leqslant u_{n+1}$. est vraie :

Initialisation

$u_0 = 2$ et $u_1 = 4,1$ donc $u_0 \leqslant u_1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité

Soit un entier $n \geqslant 0$ fixé tel que P_n est vraie.

Par hypothèse de récurrence on a $u_n \leqslant u_{n+1}$.

En multipliant par 0,3 qui est positif on obtient : $0,3u_n \leqslant 0,3u_{n+1}$

Par ailleurs , on a toujours : $0,5(n+1) \geqslant 0,5n$ ainsi en ajoutant membre à membre ces deux inégalités il vient :

$$0,3u_n + 0,5(n+1) \leqslant 0,3u_{n+1} + 0,5n$$

On ajoute encore 3,5 aux deux membres de cette inégalité pour obtenir :

$$0,3u_n + 0,5(n+1) + 3,5 \leqslant 0,3u_{n+1} + 0,5n + 3,5$$

C'est à dire : $$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$$

Sous l'hypothèse que P_n est vraie pour un entier $n \geqslant 0$ quelconque, on a donc démontré que P_{n+1} est vraie, ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion

La propriété P_n est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire donc d'après *l'axiome de récurrence* elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

5. Première méthode

Démontrons que la suite (u_n) n'est pas majorée à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

On fait l'hypothèse $\mathscr{H}$ que la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) étant majorée par hypothèse et croissante d'après la question précédente, alors elle converge vers un réel ℓ d'après le théorème de convergence monotone.

Or la suite (u_n) est croissante donc pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_0 \leqslant u_n$ et donc $0 < u_n$.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,3u_n + 0,5n + 3,5$ vérifie donc l'inégalité :

$$0,5n + 3,5 \leqslant u_{n+1}$$

Comme on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5n + 3,5 = +\infty$, on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = +\infty$.

Si la suite de terme u_{n+1} a une limite alors la suite de de terme u_n a la même limite.

Ainsi on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Sous l'hypothèse $\mathscr{H}$ que la suite (u_n) est majorée, on a donc démontré que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$. C'est une contradiction, l'hypothèse $\mathscr{H}$ est donc fausse, ce qui signifie que la suite (u_n) n'est pas majorée.

Deuxième méthode

La suite (u_n) est croissante ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant u_0 = 2 \geqslant 0$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a la relation $u_n = 0,3u_{n-1} + 0,5(n-1) + 3,5$.

Comme on sait que $u_{n-1} \geqslant 0$, on en déduit que $u_n \geqslant 0,5n - 0,5 + 3,5 = 0,5n + 3$.

Or, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5n + 3 = +\infty$ ainsi, par le théorème de comparaison il vient :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \qquad \boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ n'est pas majorée}}$$

6. Il n'est pas raisonnable de modéliser le taux de vasopressine dans le sang pour des valeurs de n grandes par le terme général u_n de la suite (u_n) si elle n'est pas majorée. On peut espérer aussi que l'hémorragie ne dure pas trop longtemps et le modèle pourrait être acceptable pour de petites valeurs de n. Cela dépend du contexte et on sort d'une approche purement mathématique.

Partie B : modélisation par une fonction

Dans cette partie, le taux de vasopressine (en microgrammes par millilitre) dans le sang est modélisé par une fonction f du temps t (en minutes) écoulé après le début de l'hémorragie. La fonction f est définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(t) = 3te^{-\frac{1}{5}t} + 2$$

1. **a.** A l'instant $t = 0$, le taux de vasopressine dans le sang est de

$$\boxed{f(0) = 3 \times 0 \times e^0 + 2 = 2 \text{ microgrammes par millilitre}}$$

b. Quinze secondes correspondent à $15/60 = 1/4$ d'une minute. Quinze secondes après le début d'une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang est égal à :

$$\boxed{f(1/4) = 3 \times \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}} + 2 = \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{20}} \approx 2,713 \text{ microgrammes par millilitre}}$$

Ce taux est supérieur ou égal à $2,5$ microgrammes par millilitre donc $\boxed{\text{il n'est pas normal}}$

c. On $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{5}t = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = 0$ par croissances comparées.

Par composition, on a donc : $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{5}t}{e^{\frac{1}{5}t}} = 0}$.

d. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on a :

$$f(t) = 3 \times 5 \times \frac{\frac{1}{5}t}{e^{\frac{1}{5}t}} + 2$$

Par produit puis somme, on déduit de la limite précédente que $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2}$.

> On peut interpréter $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2$ par le fait que dans ce modèle, le taux de vasopressine dans le sang va se stabiliser autour de 2 microgrammes par millilitre de sang qui est un taux normal car inférieur à $2,5$. Ce modèle semble prendre en compte le traitement de l'hémorragie.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

Soit les fonctions u et v dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ et définies par :

$$u(t) = 3t \quad \text{et} \quad v(t) = e^{-\frac{1}{5}t}$$

Pour tout nombre réel t positif, on a :

$$f(t) = u(t) \times v(t) + 2$$

On applique la formule de dérivation d'un produit, la formule de dérivation d'une fonction composée de la forme e^w puis la formule de dérivation d'une somme.

$$u(t) = 3t \qquad\qquad v(t) = e^{-\frac{1}{5}t}$$

on applique la formule $(e^w)' = w'e^w$ pour déterminer v'

$$u'(t) = 3 \qquad\qquad v'(t) = -\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}t}$$

on applique la formule $(uv)' = u'v + uv'$

$$f'(t) = 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t} - \frac{3t}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t}$$

on factorise par $\frac{3}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t}$

$$f'(t) = \frac{3}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t}(5-t)$$

On a démontré que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f'(t) = \frac{3}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t}(5-t)$.

3. a. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\frac{3}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t} > 0$ donc $f'(t)$ est du signe de $5-t$.

On en déduit le tableau de signe de f' et de variation de f avec la limite en $+\infty$.

t	0		5		$+\infty$
$f'(t)$		$+$		$-$	
$f(t)$	2	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	2

b. D'après le tableau de variation précédent, dans le modèle considéré, le taux de vasopressine est maximal au bout de 5 minutes et il est alors de $f(5) = 15\mathrm{e}^{-1} + 2 \approx 7,52$ microgrammes par litre.

4. a. D'après les résultats précédents, on sait que :

i. La fonction f est dérivable donc continue sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

ii. $2,5$ est une valeur intermédiaire entre $f(0) = 2$ et $f(2,5) \approx 7,52$.

iii. f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (aussi appelé théorème de la bijection), l'équation $f(t) = 2,5$ possède une unique solution t_1 dans l'intervalle $[0\,;\,5]$.

b. Par balayage avec la calculatrice, on a :

i. Sachant que f est strictement croissante sur $[0\,;\,5]$ et qu'il existe un unique t_1 dans $[0\,;\,5]$ tel que $f(t_1) = 2,5$:

- $f(0) < 2,5 < f(1)$ donc $0 < t_1 < 1$;
- $f(0,1) < 2,5 < f(0,2)$ donc $0,1 < t_1 < 0,2$;
- $f(0,17) < 2,5 < f(0,18)$ donc $\boxed{0,17 < t_1 < 0,18}$.

ii. Sachant que f est strictement décroissante sur $[5;+\infty[$ et qu'il existe un unique t_2 dans $[5;+\infty[$ tel que $f(t_2) = 2,5$:

- $f(25) > 2,5 > f(26)$ donc $25 < t_2 < 26$;
- $f(25) > 2,5 > f(25,1)$ donc $25 < t_2 < 25,1$;
- $f(25,06) > 2,5 > f(25,07)$ donc $\boxed{25,06 < t_2 < 25,07}$.

c. Selon ce modèle, chez une personne victime d'une hémorragie, d'après le tableau de variation de f, le taux de vasopressine restera supérieur à 2,5 microgramme par millilitre dans le sang dans l'intervalle $]t_1;t_2[$ donc pendant $t_2 - t_1$ minutes.

t	0		t_1		5		t_2		$+\infty$
$f(t)$	2	$\nearrow$	$2,5$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$2,5$	$\searrow$	2

D'après la question précédente, on a un encadrement de $t_2 - t_1$ d'amplitude 2×10^{-2} :

$$0,17 < t_1 < 0,18$$

donc

$$-0,18 < -t_1 < -0,17 \quad (*)$$
$$25,06 < t_2 < 25,07 \quad (**)$$

on peut ajouter membre à membre les inégalités (*) et (**) qui sont de même sens

$$25,06 - 0,18 < t_2 - t_1 < 25,07 - 0,17$$
$$24,88 < t_2 - t_1 < 24,9$$

On peut prendre comme valeur approchée à 10^{-2} près de $t_2 - t_1$ le centre de l'intervalle $]24,88;24,9[$ qui est $24,89$. C'est une valeur approchée de $t_2 - t_1$ à $\dfrac{2 \times 10^{-2}}{2} = 10^{-2}$ près c'est-à-dire à $0,01 \times 60 = 0,6$ seconde près.