Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \ln(e^{-x} + e^{-2x})$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes usuels.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

Partie A Étude de la fonction f

1. Démontrer que pour tout réel x on a

$$f'(x) = -\frac{e^{-2x}}{e^{-x} + e^{-2x}}$$

2. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
3. Justifier que pour tout réel x on a
$$f(x) = -x + \ln(e^x + 1)$$
4. Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$.
5. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Partie B Résolution de l'équation $f(x) = x$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 + X - 1 = 0$.
2. En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution α dont une valeur approchée à 10^{-2} près est $0,48$.

Partie C Étude de la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de la droite d'équation $y = -x$

1. En choisissant une forme adaptée de $f(x)$, démontrer que :
   - **a.** $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de la droite d'équation $y = -x$ pour tous les points d'abscisse réelle ;
   - **b.** $\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = 0$.
2. Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour que `seuil(s)` retourne le plus grand entier relatif n tel que $0 < f(n) + n < s$ où s est un réel strictement positif :

```
from math import log, exp

def seuil(s):
    n = 0
    while ....................... :
        n = n - 1
    return n
```

3. En résolvant une inéquation, déterminer l'entier relatif retourné par `seuil(1e-12)` où `1e-12` représente 10^{-12}.

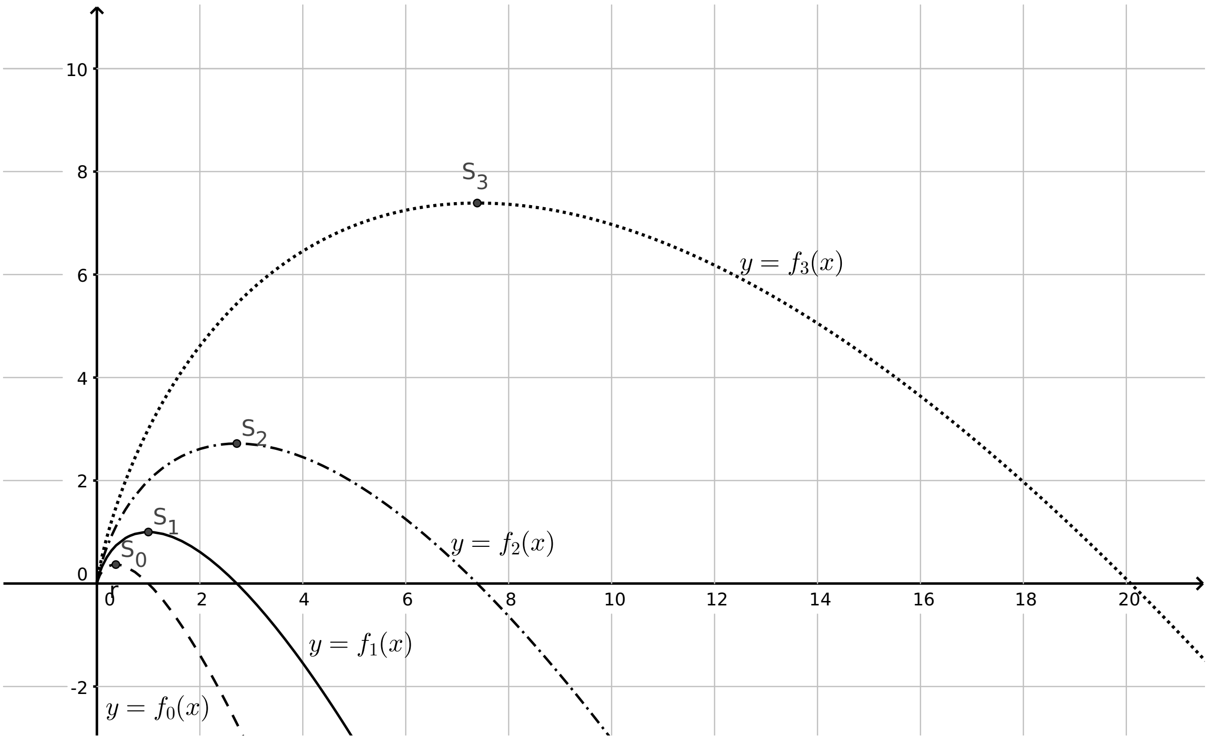
   Comment peut-on interpréter graphiquement ce résultat ?

Exercice 2

Pour tout réel k, on considère :

- la fonction f_k définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f_k : x \mapsto x(k - \ln x)$$
- le point S_k de la courbe représentative de f_k dont l'ordonnée est le maximum de f_k sur $]0\,;+\infty[$.

On a représenté ci-dessous dans un repère du plan les courbes des fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 ainsi que les points S_0, S_1, S_2 et S_3.



1. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature géométrique de l'ensemble des points S_k lorsque k parcourt $\mathbb{R}$?
2. Pour tout réel k, étudier les variations de f_k sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer les coordonnées du point S_k.
3. La conjecture établie à la question 1 est-elle vérifiée ? Justifier la réponse.