

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il retourne le terme de rang n de la suite (u_n) :

Variables :	n est un entier naturel i est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 0 à ... : Affecter à u la valeur ... Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

- a. Programmer cet algorithme avec Algobox et donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'il affiche lorsque l'on choisit $n = 3$.
- b. Que permet de calculer cet algorithme ?
- c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n .

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. a. Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x}$ sur $[0; 2]$.
- b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < u_{n+1} \leq 2$.
- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Exercice 2

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

Compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule les termes de rang n (saisi par l'utilisateur) des suites (u_n) et (v_n) :

Variables :	N est un entier U, V, W sont des réels K est un entier
Début :	Affecter 0 à K Affecter 2 à U Affecter 10 à V Saisir N Tant que $K < N$ Affecter à K Affecter à W Affecter à U Affecter $\frac{W + 3V}{4}$ à V Fin tant que Afficher U Afficher V
Fin	

Programmer cet algorithme avec Albox puis l'exécuter en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B

1.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.
 - b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que pour tout entier naturel n , $w_n = 8 \left(\frac{5}{12}\right)^n$.
2.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
 - b. Dédire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.
 - c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.
4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.