Chapitre 3 : Dérivation et continuité

1 Dérivation d'une fonction

1.1 Nombre dérivé de f en a et fonction dérivée

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, a et x des réels appartenant à I et h un réel différent de 0 tel que $a+h \in$ I.

f est dite dérivable en a si l'une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :

- le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0.
- le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a.

Cette limite est le nombre dérivé de f en a, elle est notée $f'(a)$.Ainsi on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

Si f est dérivable en tout point x d'un intervalle ouvert I, on dit que f est dérivable sur I, et on appelle fonction dérivée de f, notée f', la fonction qui à chaque $x \in$ I associe $f'(x)$.

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et soit a un réel appartenant à I.On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.
Si f est dérivable en a, la droite passant par le point $\mathrm{M}\big(a\,;\,f(a)\big)$ de $\mathscr{C}_f$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée tangente à $\mathscr{C}_f$ en M.
Une équation cartésienne de cette tangente en M est : $\boldsymbol{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$.

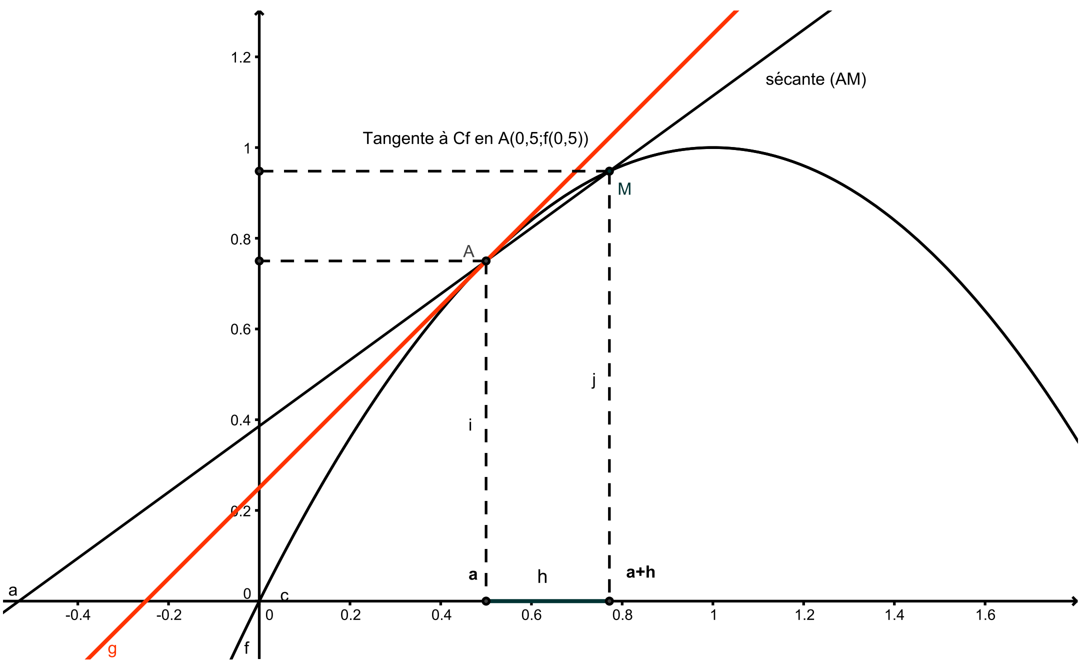


FIGURE 1 – Tangente en $\mathrm{A}\big(0,5\,;\,f(0,5)\big)$ à la courbe de la fonction $f : x \mapsto -x^2+2x$

Propriété 1 *Approximation affine*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et soit a un réel appartenant à I. f est dérivable en $a \in$ I si et seulement s'il existe une fonction ε telle que pour tout réel $x \in$ I, on ait :

$$f(x) = f(a) + (x-a) \times f'(a) + (x-a) \times \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

La fonction définie sur I par $\varphi : x \mapsto f(a) + (x-a) \times f'(a)$ est l'approximation affine d'ordre 1 de f au voisinage de a.

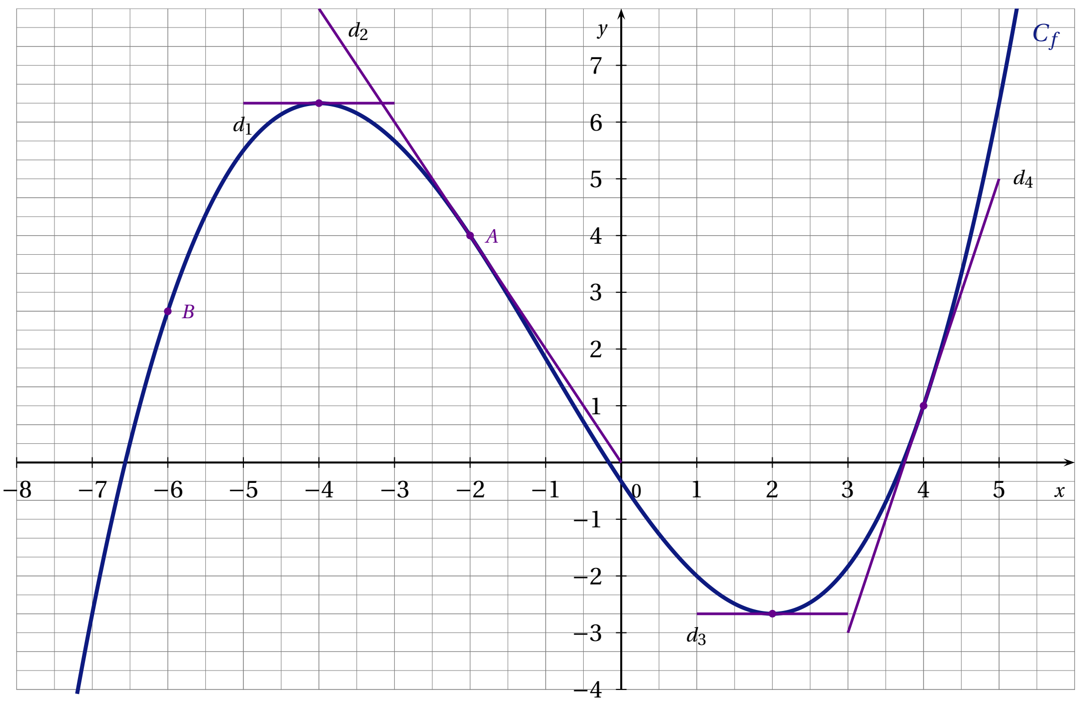
Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{2}\,; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{1+2x}$.

1. Démontrer que f est dérivable en 3 et déterminer $f'(3)$.
2. En déduire une approximation affine de $f\left(3+10^{-10}\right)$, comparer avec la valeur approchée donnée par la calculatrice (on comparera celle-ci avec la valeur qu'elle donne pour $\sqrt{7}$ puis on lui fera évaluer $f\left(3+10^{-10}\right) - \sqrt{7}$).

Exemple 2

Sur la figure ci-dessous, C_f est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont tangentes à la courbe C_f.



1. Déterminer graphiquement $f(-4)$, $f(-2)$ et $f(2)$.
2. Déterminer graphiquement les nombres dérivés $f'(-4)$ et $f'(2)$.
3. La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse -2 passe par l'origine du repère. Déterminer $f'(-2)$.
4. La tangente T à la courbe C_f au point $B\left(-6; \frac{8}{3}\right)$ est parallèle à la droite d_4. Déterminer $f'(-6)$ puis, donner une équation de la tangente T à la courbe au point B. Tracer cette droite sur le graphique précédent.

2 Fonctions dérivées et opérations

2.1 Dérivées des fonctions usuelles

f est une fonction dérivable sur $\mathscr{D}$ par rapport à la variable x

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble $\mathscr{D}$ de dérivabilité de f
$f(x) = p$ avec $p \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$ avec $(m, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

TABLE 1 – Dérivées des fonctions usuelles (à compléter en cours d'année)

2.2 Règles opératoires sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables par rapport à la variable x sur un intervalle ouvert I

Opération sur u et v, $f =$	Fonction dérivée $f' =$	Ensemble de dérivabilité de f
$u + v$	$u' + v'$	I
λu avec $\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$	I
uv	$u'v + uv'$	I
$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	I privé des réels x tels que $v(x) = 0$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	I privé des réels x tels que $v(x) = 0$

TABLE 2 – Opérations algébriques sur les fonctions dérivables

Propriété 2 *Conséquence des régles opératoires*

- Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont dérivables sur tout intervalle où elles sont définies.

Exemple 3

Soient les fonctions f, g, h et m définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3}{5} - 4x^2 + 7x - 6 \quad g(x) = 4x\sqrt{x} \quad h(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x} \quad m(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2}$$

Justifier que ces fonctions sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et calculer leurs fonctions dérivées.

2.3 Dérivée d'une fonction composée, compléments

Propriété 3

- Si $\boldsymbol{u}$ est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $\sqrt{\boldsymbol{u}}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt{\boldsymbol{u}}\right)' = \dfrac{\boldsymbol{u}'}{\boldsymbol{2\sqrt{u}}}$
- Soit $\boldsymbol{n}$ un entier relatif non nul, si $\boldsymbol{u}$ est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I si $\boldsymbol{n < 0}$, alors la fonction $\boldsymbol{u^n}$ est dérivable sur I et $\left(\boldsymbol{u^n}\right)' = \boldsymbol{nu'u^{n-1}}$.

Propriété 4 *Généralisation, propriété admise*

Soit $\boldsymbol{u}$ est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\boldsymbol{f}$ une fonction dérivable en $\boldsymbol{u(x)}$ pour tout $\boldsymbol{x}$ appartenant à I, alors la fonction composée $\boldsymbol{g : x \mapsto f(u(x))}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{I},\ \boldsymbol{g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))}$$

Corollaire

Soit une fonction affine $\boldsymbol{u : x \mapsto ax + b}$ et $\boldsymbol{f}$ une fonction dérivable sur un intervalle J et I est un intervalle tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathrm{I}$ on a $\boldsymbol{u(x) = ax + b} \in \mathrm{J}$.
La fonction $\boldsymbol{g}$ définie sur I par $\boldsymbol{g(x) = f(ax+b)}$ est dérivable sur I et pour tout réel $\boldsymbol{x} \in \mathrm{I}$, $\boldsymbol{g'(x) = af'(ax+b)}$.

Preuve : *Preuve du corollaire, voir manuel page 104*

□

Exemple 4

1. Soient les fonctions f, g, h et m définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(3x - 1 + x^2\right)^3 \quad g(x) = \sqrt{x^4+1} \quad h(x) = \frac{5}{\left(3x^3+4\right)^4} \quad m(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$$

   Justifier que ces fonctions sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et calculer leurs fonctions dérivées.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f'.
   Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(3x+1)$ et $h(x) = f(-x)$.
   - **a.** Justifier que g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour x réel, exprimer $g'(x)$ et $h'(x)$ à l'aide de $f'(x)$.
   - **b.** Pour tout réel x on donne $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, en déduire $g'(x)$ et $h'(x)$ en fonction de x.

3 Fonction dérivée et sens de variation

3.1 Lien entre signe de f' et variations de f

Théorème 1

Soit f une fonction monotone et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f est constante sur I alors pour tout $x \in$ I on a $f'(x) = 0$.
- Si f est croissante sur I alors pour tout $x \in$ I on a $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est décroissante sur I alors pour tout $x \in$ I on a $f'(x) \leqslant 0$.

Théorème 2

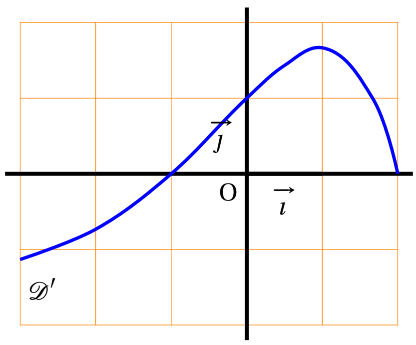
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.
- Si f' strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' strictement négative sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple 5 *Métropole juin 2012*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{D}'$ ci -dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1 ; 0)$.

3.2 Condition nécessaire et Condition suffisante d'extremum local

Propriété 5 *admise*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $a \in$ I.

1. $\boxed{\text{Condition nécessaire d'extremum local}}$
   Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

2. $\boxed{\text{Condition suffisante d'extremum local}}$
   Si $f'(a) = 0$ et si f' s'annule en changeant de signe en a alors f admet un extremum local en a.

Remarque 1

Le fait que $f'(a) = 0$ est une condition nécessaire mais pas suffisante pour que f atteigne un extremum local en a comme le prouve le contre-exemple de la fonction cube avec $a = 0$.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3$, f est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$, de plus on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$ et f' s'annule uniquement pour $x = 0$, donc d'après le théorème f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f n'atteint pas d'extremum local en 0, alors que $f'(0) = 0$.
f' ne change pas de signe en 0 donc la condition suffisante d'extremum local n'est pas vérifiée.

Exemple 6

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 15x$$
   a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis déterminer f' et f''.
   b. Etudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(-1)$.
   c. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit g la fonction définie sur $[-4\,;5]$ par :
$$g(x) = (1 - x)\sqrt{x^2 + 1}$$
   Etudier les variations de g sur $[-4\,;5]$ en déduire les extrema de g sur $[-4\,;5]$.

4 Continuité d'une fonction

La notion de continuité de f traduit mathématiquement le fait que sa courbe représentative peut se tracer sans « trou », sans « lever le crayon ».

4.1 Continuité

Définition 3

- Dire que f est continue au point a, c'est-dire que f est définie sur un intervalle ouvert contenant a et qu'elle admet une limite en ce point. Cette limite est alors nécessairement $f(a)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{ou} \quad \lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

- On dit qu'une fonction est continue sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ si elle est continue en tout point de $\mathbb{R}$ ou de cet intervalle.

Remarque 2

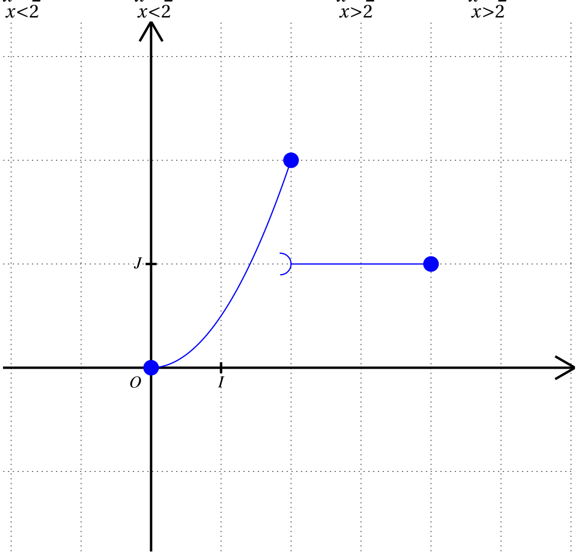
- *Si* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ *alors* f *n'est pas continue en* a.
- *Si l'intervalle I est fermé* $[a\,;b]$, f *est continue à droite en a si* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = f(a)$ *et continue à gauche en b si* $\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}} f(x) = f(b)$.

Exemple 7

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0.5x^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ f(x) = 1 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$$

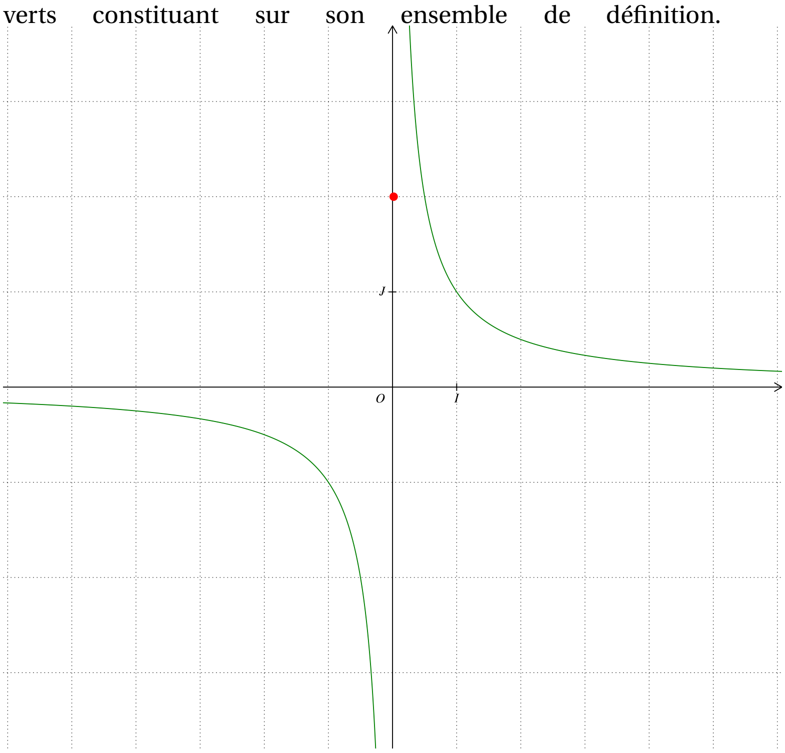
f est continue sur $[0\,;2[$ et sur $]2\,;4]$ mais on ne peut pas tracer la courbe de f sans lever le crayon en l'abscisse 2, f est discontinue en 2.
On vérifie que les limites à gauche et à droite en 2 sont différentes :
$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}} 0.5x^2 = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} 1 = 1$



La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ g(0) = 2 \end{cases}$$

est continue sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ mais discontinue en 0.
Notons que la fonction inverse qui coincide avec g sur $\mathbb{R} - \{0\}$ est continue sur les deux intervalles ouverts constituant sur son ensemble de définition.



Exemple 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x<1 \\ 2x+1 & \text{si } 0 \leqslant x < 4 \\ x & \text{si } 4 \leqslant x \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement cette fonction.

2. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Si non, préciser ses éventuels points de discontinuité.

Propriété 6 *Continuité et dérivabilité*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

1. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

2. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Preuve : *ROC*

Soit a un réel de l'ensemble de définition de f. On écrit l'approximation affine de f en a.
Il existe une fonction ε telle que : $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \varepsilon(x)(x-a)$$

Alors quand x tend vers a, $\varepsilon(x)$ et $(x-a)$ tendent vers zéro, et donc $f(x)$ tend vers $f(a)$. □

Remarque 3

- *La réciproque de ce théorème est fausse, comme le prouve le contre-exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$ mais qui n'est pas dérivable en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$*
- *La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$ est dérivable donc continue sur $]-\infty\,; 3[$ et sur $]3\,; +\infty[$.*
  On conviendra, dans les tableaux de variations, que les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

4.2 Règles opératoires

Propriété 7 *admise*

I désigne un intervalle.

1. D'après la propriété 6, la dérivabilité d'une fonction sur I suffit à prouver qu'elle est continue sur cet intervalle.
2. Une fonction peut être continue sur I sans être dérivable sur I. Pour le prouver on peut appliquer les règles opératoires suivantes sur les fonctions continues.
   - Les fonctions polynômes et la fonction valeur absolue $x \mapsto |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

     La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.
   - Une fonction rationnelle est continue sur chacun des intervalles où elle est définie.
   - Si u et v sont continues sur I, alors $u+v$, $u \times v$ et u^n (pour tout entier naturel n non nul) sont continues sur I , $\dfrac{u}{v}$ et $\sqrt{u}$ sont continues sur chaque intervalle où elles sont définies.

Exemple 9 *voir exercices 24 et 25 p.116*

Démontrer dans chaque cas que la fonction f est continue sur I.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-3}$ sur $\text{I}=]3\,;+\infty[$
2. $f : x \mapsto 2\sqrt{x^2} - 3|x| + x + 5$ sur $\text{I}=\mathbb{R}$

4.3 Complément à l'étude des variations d'une fonction

Propriété 8

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,; b]$ et dérivable sur $]a\,; b[$.

1. Si pour tout $x \in]a\,; b[$ on a $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $[a\,; b]$.
2. Si pour tout $x \in]a\,; b[$ on a $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $[a\,; b]$.

Exemple 10

La fonction racine carré $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,; 10]$ et dérivable sur $]0\,; 10]$.
Elle n'est pas dérivable en 0 mais comme pour tout $0 < x \leqslant 10$ on a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$, le corollaire précédent permet d'affirmer que f est strictement croissante sur $[0\,; 10]$.

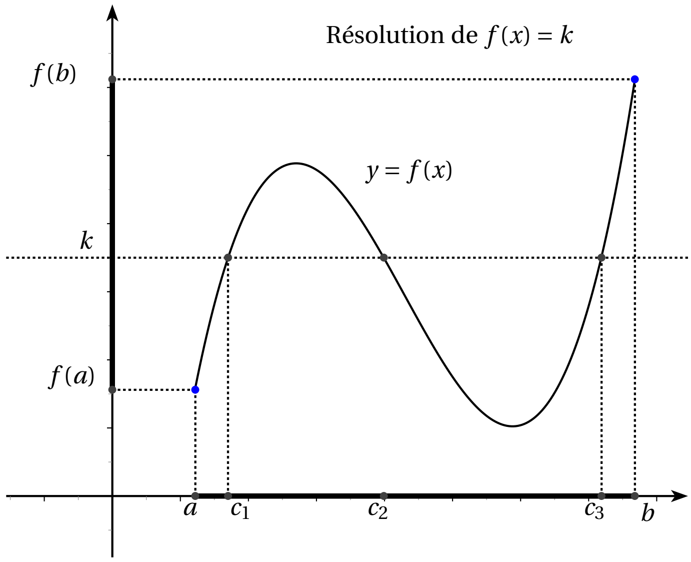
5 Théorème des valeurs intermédiaires

5.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Exemple 11 *exo 60 p 120*

5.2 Corollaires du TVI

Corollaire *dit théorème de la bijection*

Si f est une fonction continue strictement monotone sur $[a; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a; b]$.

Preuve : *ROC*

Soit f une fonction continue strictement décroissante sur l'intervalle $[a; b]$ et un réel k tel que $f(a) > k > f(b)$.

- *D'après le théorème des valeurs intermédiaires , il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ solution de l'équation $f(x) = k$.*
- *Soit d une solution quelconque dans $[a; b]$ de l'équation $f(x) = k$, supposons que $d \neq c$.*
  On peut supposer $c < d$ (le cas $c > d$) se traite de la même façon).
  f est strictement croissante sur $[a; b]$ donc $f(c) < f(d)$ ce qui contredit le fait que $f(c) = f(d) = k$
  L'hypothèse $d \neq c$ est donc fausse, par l'absurde on a donc démontré que c est l'unique solution de l'équation $f(x) = k$ dans $[a; b]$.

Pour une fonction f continue strictement croissante sur $[a; b]$, le raisonnement est similaire en remplaçant $f(a) > k > f(b)$ par $f(a) < k < f(b)$. □

Corollaire *généralisation du précédent aux intervalles ouverts ou semi-ouverts*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, du type $[a; b[$,$]a; b]$,$[a; +\infty[$, $]a; +\infty[$, $]-\infty; b]$ ou $]-\infty; b[$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$(ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$) et $f(b)$(ou $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$), l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans I (qui est unique si la fonction est strictement monotone).

Exemple 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-2; 4]$.
2. Etudier le signe de $f(x)$ sur $]-\infty; 4]$.

5.3 Application à la recherche d'une solution approchée d'une équation

Soit la fonction f définie sur $[2;3]$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$.

5.3.1 Preuve de l'existence et de l'unicité d'une solution de l'équation $f(x) = 0$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[2;3]$.

On veut déterminer des encadrements de α *d'amplitude* $0,001$ *puis* $0,000001$. *On va le réaliser par deux méthodes.*

5.3.2 Approximation de α par la méthode par balayage (voir aussi le TP 1 page 110)

1. Dresser un tableau de valeurs de f sur $[2;3]$ avec un pas de 0,1.
   En déduire un encadrement $a_1 \leqslant \alpha \leqslant b_1$ de α d'amplitude 0,1.
2. Dresser un tableau de valeurs de f sur $[a_1;b_1]$ avec un pas de 0,01.
   En déduire un encadrement $a_2 \leqslant \alpha \leqslant b_2$ de α d'amplitude 0,01.
3. Dresser un tableau de valeurs de f sur $[a_2;b_2]$ avec un pas de 0,001.
   En déduire un encadrement $a_3 \leqslant \alpha \leqslant b_3$ de α d'amplitude 0,001.
4. Programmer l'algorithme ci-contre avec `Algobox`.
   On n'oubliera pas d'enregistrer la fonction $F1(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ dans le menu « Utiliser une fonction numérique ».
5. Expliquer le rôle de la boucle TANT QUE amorcée en ligne 12 puis celui de la boucle TANT QUE amorcée en ligne 15.
6. Tester cet algorithme avec $a = 1$, $b = 5$ et `precision` = 0.001 (retrouver les résultats de la question 3.), puis avec `precision` = 0.00001 pour déterminer des valeurs approchées de α.

```
1   VARIABLES
2     a EST_DU_TYPE NOMBRE
3     b EST_DU_TYPE NOMBRE
4     pas EST_DU_TYPE NOMBRE
5     precision EST_DU_TYPE NOMBRE
6     x EST_DU_TYPE NOMBRE
7   DEBUT_ALGORITHME
8     LIRE a
9     LIRE b
10    LIRE precision
11    pas PREND_LA_VALEUR b-a
12    TANT_QUE (pas>precision) FAIRE
13      DEBUT_TANT_QUE
14      pas PREND_LA_VALEUR pas/10
15      TANT_QUE (F1(a+pas)<0) FAIRE
16        DEBUT_TANT_QUE
17        a PREND_LA_VALEUR a+pas
18        FIN_TANT_QUE
19      FIN_TANT_QUE
20    b PREND_LA_VALEUR a+pas
21    AFFICHER "Valeur approchée par défaut"
22    AFFICHER a
23    AFFICHER "Valeur approchée par excès"
24    AFFICHER b
25  FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :

F1(x)=pow(x,3)-2*pow(x,2)-1
```

5.3.3 Approximation de α par la méthode par dichotomie (voir aussi le TP 1 page 110)

Méthode

On suppose f continue et strictement monotone sur $[a;b]$ avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α dans $[a;b]$.

- On partage $[a;b]$ en deux intervalles de même amplitude en calculant $m=\dfrac{a+b}{2}$ abscisse du milieu de l'intervalle puis on calcule $f(m)$.
- Si $f(a)\times f(m)\leqslant 0$ alors $f(a)$ et $f(m)$ de signes opposés, donc f s'annule entre a et m donc $\alpha\in[a;m]$.
  Si $f(a)\times f(m)>0$ alors $f(a)$ et $f(m)$ de même signe, donc f ne s'annule pas dans $[a;m]$, donc $\alpha\in[m;b]$.

Algorithme 1 *Dichotomie*

Entrée(s) $a, b, precision$
  tant que $|a-b|>$ precision **faire**
    $\dfrac{a+b}{2}\to m$
    si $f(a)\times f(m)\leqslant 0$ **alors**
      $m\to b$
    sinon
      $m\to a$
    fin du si
  fin du tant que
Sortie(s) a, b

1. Appliquer à la main l'algorithme de dichotomie pour obtenir un encadrement de α d'amplitude $0,1$ en complétant le tableau ci-dessous :

Etape	a	b	$m=\dfrac{a+b}{2}$	Signe de $f(a)\times f(m)$
1	2	3		
2				
…				
…				
…				
…				
…				
…				

2. Programmer l'algorithme de dichotomie sur `Algobox` ou sur sa calculatrice (voir ci-dessous), pour obtenir des encadrement de α d'amplitudes $0,001$ puis $0,000001$.

3. Appliquer l'algorithme dans le cas de l'exercice 76 page 122.

Traduction de l'algorithme de dichotomie pour TEXAS

```
Prompt A,B,P
While abs(B − A) > P
(A + B) ÷ 2 → M
If Y1(A) × Y1(M) ⩽ 0
Then
M → B
Else
M → A
End
End
Disp A,B
```

 # Commentaire :

Enregistrer d'abord la fonction $Y_1(X)=X^3-2*X^2-1$

Traduction de l'algorithme de dichotomie pour CASIO

```
?→ A
?→ B
?→ P
While abs(B − A) > P
(A + B) ÷ 2 → M
If Y1(A) × Y1(M) ⩽ 0
Then
M → B
Else
M → A
IfEnd
Endwhile
A◢
B◢
```

Corrigé 1 *Recherche de solution approchée d'une équation*

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[2;3]$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$.

6.3.1 Preuve de l'existence et de l'unicité d'une solution de l'équation $f(x) = 0$

f est un fonction polynôme donc elle est dérivable sur son ensemble de définition de plus :

$$\forall x \in [2;3],\ f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$$

D'après la règle du signe d'un trinôme :

$$\forall x \in [2;3],\ f'(x) > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $[2;3]$.

f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$, $f(2) = -1 < 0$ et $f(3) = 8 > 0$ donc d'après un corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[2;3]$.

6.3.2 Approximation de α par la méthode par balayage

Résultats pour l'approximation de α avec l'algorithme de recherche par balayage programmé sur `Algobox` pour $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ avec les valeurs initiales $a = 2$, $b = 3$.

Précision p	a	b
0,001	2,205	2,206
0,000001	2,205569	2,205570

6.3.2 Approximation de α par la méthode par dichotomie

Résultats pour l'approximation de α avec l'algorithme de dichotomie ci-contre programmé sur `Algobox` pour $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ avec les valeurs initiales $a = 2$, $b = 3$.

Précision p	a	b
0,001	2,2050781	2,2060547
0,000001	2,2055693	2,2055702

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  m EST_DU_TYPE NOMBRE
  P EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE P
  TANT_QUE (b-a>P) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    m PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
    SI ((F1(a)*F1(m)<=0)) ALORS
      DEBUT_SI
      b PREND_LA_VALEUR m
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        a PREND_LA_VALEUR m
        FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER a
  AFFICHER b
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée : F1(x)=pow(x,3)-2*pow(x,2)-1
```

```
Quelques résultats d'encadrements par dichotomie de la solution alpha obtenus
avec un programme en langage Python :

un encadrement d'amplitude 0.1 de la solution est :
 [2.1875;2.25]

 un encadrement d'amplitude 0.01 de la solution est :
 [2.203125;2.2109375]

 un encadrement d'amplitude 0.001 de la solution est :
 [2.205078125;2.2060546875]

 un encadrement d'amplitude 0.0001 de la solution est :
 [2.20556640625;2.20562744140625]

 un encadrement d'amplitude 1e-05 de la solution est :
 [2.20556640625;2.2055740356445312]

 un encadrement d'amplitude 1e-06 de la solution est :
 [2.205569267272949;2.2055702209472656]

 un encadrement d'amplitude 1e-07 de la solution est :
 [2.2055693864822388;2.2055694460868835]

 un encadrement d'amplitude 1e-08 de la solution est :
 [2.2055694237351418;2.2055694311857224]

 un encadrement d'amplitude 1e-09 de la solution est :
 [2.2055694302543998;2.2055694311857224]

 un encadrement d'amplitude 1e-10 de la solution est :
 [2.205569430370815;2.2055694304290228]

 un encadrement d'amplitude 1e-11 de la solution est :
 [2.205569430399919;2.205569430407195]

 un encadrement d'amplitude 1e-12 de la solution est :
 [2.205569430399919;2.2055694304008284]

 un encadrement d'amplitude 1e-13 de la solution est :
 [2.205569430400544;2.205569430400601]

 un encadrement d'amplitude 1e-14 de la solution est :
 [2.205569430400587;2.205569430400594]

 un encadrement d'amplitude 1e-15 de la solution est :
 [2.2055694304005895;2.2055694304005904]
```

Ci-dessous, le programme Python donnant les résultats précédents, les textes précédés de # sont des commentaires.

```
from math import*    #pour importer les fonctions mathématiques (ici fabs() pour valeur absolue)


#Définition des fonctions ou sous-programmes

#Definition de la fonction f

def f(x):
     return x**3-2*x**2-1

#Algorithme de dichotomie appliqué à la fonction f entre a et b avec la précision p
#la méthode format permet d'insérer les valeurs  de a,b,p dans la chaine de caractères ch

def dicho(a,b,p):

    while (fabs(b-a)>=p):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<=0:
            b=m
        else:
            a=m

    ch=" un encadrement d'amplitude {} de la solution est : \n [{};{}]"
    print(ch.format(p,a,b))
    print(" ")              # pour sauter une ligne


#Programme principal avec une boucle qui affiche les dichotomies pour p prenant toutes les 10^-k pour k entre 1 et 15

a,b,p=1,5,0.1     #initialisation (en parallèle) des variables

while p>0.0000000000000001:
       dicho(a,b,p)
       p=p/10
```

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures