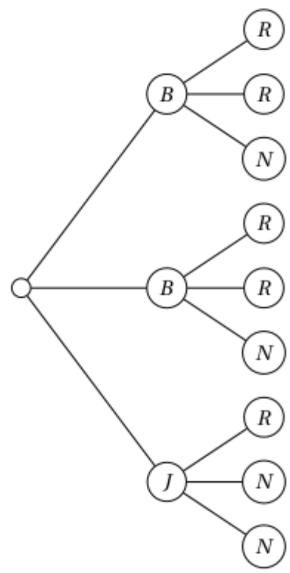
Corrections
Arbres de probabilités

Activité 1

On considère une expérience aléatoire (E) constituée de la succession de deux expériences aléatoires E_1 et E_2 telles que le résultat de E_1 modifie l'expérience E_2 :

- (E1) : On effectue un premier tirage dans l'urne α contenant deux boules bleues B et une boule jaune J indiscernables au toucher;
- (E2) : L'urne choisie pour le deuxième tirage dépend de la couleur de la boule tirée au premier tirage.
  - Si on a tiré une boule bleue B dans l'urne α alors on effectue un deuxième tirage dans l'urne β qui contient deux boules rouges R et une boule noire N indiscernables au toucher.
  - Si on a tiré une boule jaune J dans l'urne α alors on effectue un deuxième tirage dans l'urne γ qui contient une boule rouge R et deux boules noires N indiscernables au toucher.

On a modélisé cette situation par **l'arbre de dénombrement** ci-dessous :



1. À l'aide de cet **arbre de dénombrement**, déterminer la probabilité de tirer une boule rouge lors d'une réalisation de l'expérience aléatoire (E).

2. Si on multipliait par 100 les nombres de boules de chaque couleur dans toutes les urnes, pourrait-on modéliser l'expérience aléatoire (E) à l'aide d'un arbre de dénombrement?

3. On propose une autre modélisation, à l'aide d'un **arbre pondéré de probabilités**, où les branches issues d'un même noeud et représentant la même couleur vont être fusionnées. De plus on va

1) L'univers de cette expérience est constitué de 9 issues équiprobables qui sont les couples (boule 1er tirage, boule 2nd tirage).

On applique la formule de calcul d'une probabilité lorsqu'on est en situation d'équi-probabilité :

$$\frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

La probabilité de tirer une boule rouge au 2nd tirage est :

$$\frac{5}{9}$$

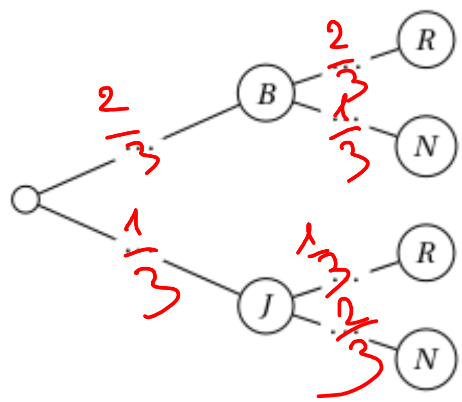
2) Il y aurait trop de branches on ne pourrait pas modéliser l'expérience aléatoire par un arbre de dénombrement s'il y avait 100 fois plus de boules.

les étiqueter avec la probabilité que la couleur à l'extrémité de la branche se réalise sachant que l'événement porté par le noeud origine de la branche est réalisé.

Dans notre exemple :

- <u>Premier niveau :</u> On construit deux branches d'extrémités B et J issues du noeud racine et on étiquette :
  - la branche d'extrémité B par la probabilité de tirer une boule bleue dans l'urne α donc par $\mathbb{P}(B) = \ldots \frac{2}{3}$
  - la branche d'extrémité J par la probabilité de tirer une boule jaune dans l'urne α donc par $\mathbb{P}(J) = \ldots \frac{1}{3}$
- <u>Second niveau :</u> À partir des noeuds B et J construits au premier niveau, on construit deux branches d'extrémités R et N mais on les étiquette différemment :
  - pour les branches issues du noeud B, on tire dans l'urne β, donc :
    * on étiquette la branche d'extrémité R par la probabilité conditionnelle de tirer R sachant qu'on a tiré B au premier tirage, donc par $\mathbb{P}_B(R) = \ldots \frac{2}{3}$
    * on étiquette la branche d'extrémité N par la probabilité conditionnelle de tirer N sachant qu'on a tiré B au premier tirage, donc par $\mathbb{P}_B(N) = \ldots \frac{1}{3}$
  - pour les branches issues du noeud J, on tire dans l'urne γ, donc :
    * on étiquette la branche d'extrémité R par la probabilité conditionnelle de tirer R sachant qu'on a tiré J au premier tirage, donc par $\mathbb{P}_J(R) = \ldots \frac{1}{3}$
    * on étiquette la branche d'extrémité N par la probabilité conditionnelle de tirer N sachant qu'on a tiré J au premier tirage, donc par $\mathbb{P}_J(N) = \ldots \frac{2}{3}$

Compléter **l'arbre pondéré de probabilités** ci-dessous.



4. **a.** Déterminer la probabilité de l'événement B ∩ R = « Tirer une boule bleue au premier tirage **et** une boule rouge au second ».
A-t-on $\mathbb{P}(B \cap R) = \mathbb{P}_B(R)$? Non

$P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

b. Déterminer la probabilité de l'événement J ∩ R = « Tirer une boule jaune au premier tirage **et** une boule rouge au second ».
A-t-on $\mathbb{P}(J \cap R) = \mathbb{P}_J(R)$? Non

$P(J \cap R) = P(J) \times P_J(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

c. Retrouver la probabilité de l'événement R = « Tirer une boule rouge » déjà calculée avec l'arbre de dénombrement.

$P(R) = P(B \cap R) + P(J \cap R) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

Classer dans l'ordre croissant les probabilités $\mathbb{P}(R)$, $\mathbb{P}_B(R)$ et $\mathbb{P}_J(R)$. Interpréter l'ordre obtenu.

$P_J(R) \leq P(R) \leq P_B(R)$

5. L'arbre pondéré de probabilités serait-t-il modifié si on multipliait par 100 les nombres de boules de chaque couleur dans toutes les urnes? Non

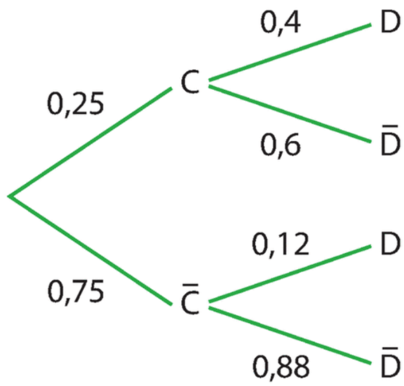
Exercice 47 p. 46

47 C et D sont deux événements associés à une expérience aléatoire représentée par l'arbre de probabilités ci-contre.

1. Donner $p(C)$, $p_{\overline{C}}(D)$ et $p_C(\overline{D})$.

2. Calculer $p(C \cap D)$ et $p(\overline{C} \cap D)$.

3. En déduire $p(D)$.



1) $P(C) = 0,25$

$P_{\overline{C}}(D) = 0,12$ se lit probabilité de D sachant $\overline{C}$

$P_C(\overline{D}) = 0,6$ se lit probabilité de $\overline{D}$ sachant C

2) $P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D) = 0,25 \times 0,4 = 0,1$

$P(\overline{C} \cap D) = P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(D) = 0,75 \times 0,12$

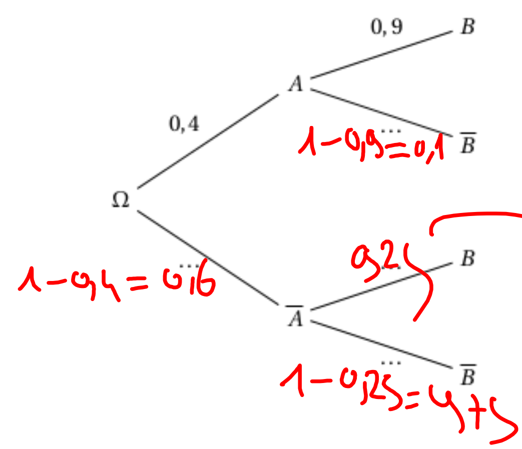
$P(\overline{C} \cap D) = 0,09$

$P(D) = P(C \cap D) + P(\overline{C} \cap D) = 0,1 + 0,09$

$P(D) = 0,19$

Capacité 1 ***Compléter un arbre de probabilités pondérées avec la propriété des noeuds***

Compléter les probabilités manquantes dans l'arbre pondéré de probabilités ci-dessous. On donne de plus $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0,15$.



$$\frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = P_{\overline{A}}(B)$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,6$$

$$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0,15}{0,6} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{A}}(B) = 1 - 0,25 = 0,75$$

Capacité 2 *Calculer une probabilité avec la propriété des chemins*

On reprend l'arbre pondéré de probabilités de la capacité 1.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathbb{P}(A \cap B)$ **c.** $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$ **e.** $\mathbb{P}(B)$

b. $\mathbb{P}_A(B)$ **d.** $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$ **f.** $\mathbb{P}(\overline{B})$

1) a) $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}9 = 0{,}36$

b) $P_A(B) = 0{,}9$ c) $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}25$

d) $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}15$ e) $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

$P(B) = 0{,}36 + 0{,}15 = 0{,}51$

f) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}51 = 0{,}49$

2. **a.** La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B(A)$ apparaît-elle dans l'arbre pondéré ? Sinon comment peut-on la calculer ?

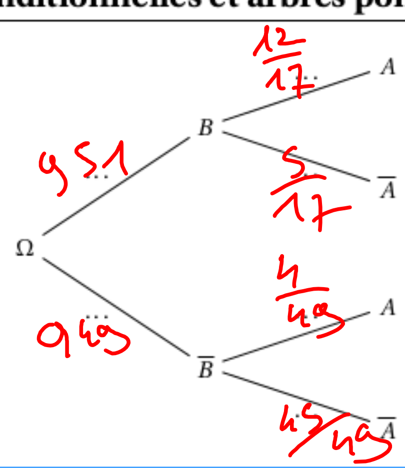
Non

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}9}{0{,}51} = \dfrac{36}{51} = \dfrac{12}{17}$

b. Calculer de même $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$

c. Compléter l'arbre pondéré de probabilités ci-dessous :

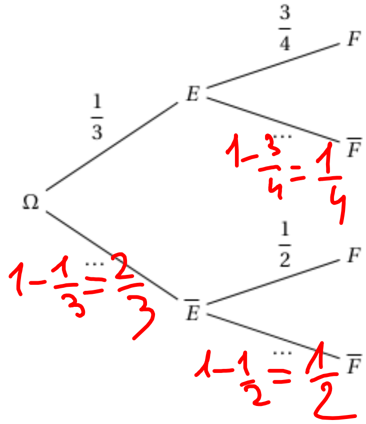
b) $P_{\overline{B}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}1}{0{,}49} = \dfrac{0{,}04}{0{,}49} = \dfrac{4}{49}$



Capacité 3 *Appliquer la formule des probabilités totales*

On considère l'arbre pondéré de probabilités ci-contre.

1. Compléter les probabilités manquantes dans l'arbre.
2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(E \cap F)$.
3. En appliquant la formule des probabilités totales montrer que la probabilité de l'événement F est égale à $\frac{7}{12}$.



2) $P(E \cap F) = P(E) \times P_E(F) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

3) E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(E \cap F) + P(\overline{E} \cap F)$$

$$P(F) = P(E) \times P_E(F) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(F)$$

$$P(F) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

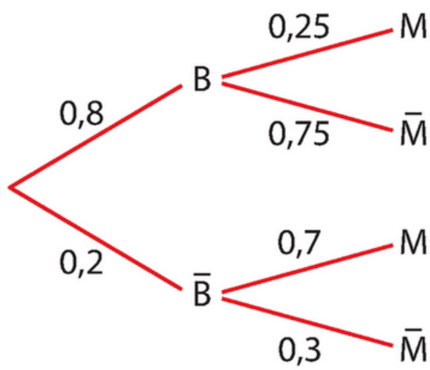
Exercice 48 p. 346

48 Nélyne tire au sort une confiserie dans une grande boîte contenant des bonbons et des chewing-gums soit à la menthe, soit à la fraise.

On considère les événements suivants.

- B : « La confiserie tirée est un bonbon. »
- M : « La confiserie tirée est à la menthe ».

On donne ci-contre l'arbre de probabilités modélisant la situation.



1. Quelle est la probabilité que la confiserie tirée soit un chewing-gum ?

2. Sachant que la confiserie tirée est un bonbon, quelle est la probabilité qu'il soit à la fraise ?

3. Calculer $p(B \cap \bar{M})$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Calculer la probabilité que la confiserie tirée soit une confiserie à la fraise.

1) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,8 = 0,2$

2) $P_B(\bar{M}) = 0,75$

3) $P(B \cap \bar{M}) = P(B) \times P_B(\bar{M})$

$P(B \cap \bar{M}) = 0,8 \times 0,75 = 0,6$

4) B et $\bar{B}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(M) = P(B \cap M) + P(\bar{B} \cap M)$

$$P(M) = P(B) \times P_B(M) + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(M)$$

$$P(M) = 0,2 \times 0,25 + 0,2 \times 0,7$$

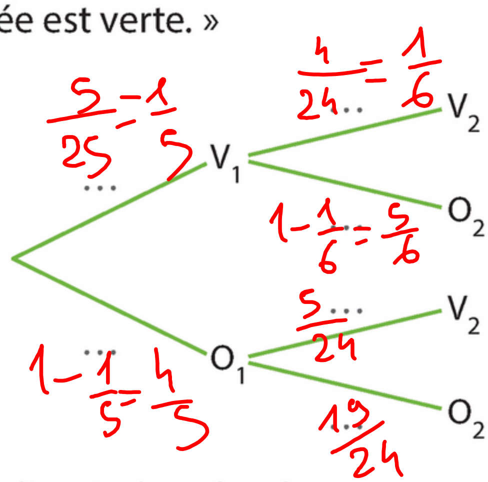
$$P(M) = 0,05 + 0,14 = 0,19$$

53 Emmy tire successivement et **sans remise** deux boules dans une urne contenant 25 boules indiscernables au toucher, 5 de couleur verte et le reste de couleur orange.

On considère les événements suivants.

- V_1 : « La première boule tirée est verte. »
- O_1 : « La première boule tirée est orange. »
- V_2 : « La deuxième boule tirée est verte. »
- O_2 : « La deuxième boule tirée est orange ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant.



2. Déterminer la probabilité d'avoir deux boules vertes.

3. Déterminer la probabilité d'avoir une boule verte au second tirage.

2) $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$

3) V_1 et O_1 forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(O_1 \cap V_2)$$

$P(V_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{24} = \frac{1}{30} + \frac{4}{24} = \frac{1}{30} + \frac{1}{6}$

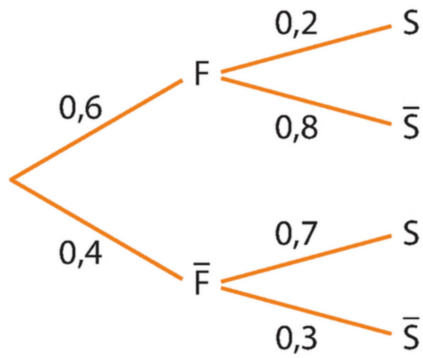
$P(V_2) = \frac{1}{30} + \frac{5}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

55 F et S sont deux événements associés à une expérience aléatoire représentée par l'arbre de probabilités ci-contre.

1. Donner $p(F)$ et $p_F(S)$

2. Calculer $p(F \cap S)$ puis $p(S)$.

3. En déduire $p_S(F)$.



1) $P(F) = 0{,}6$ et $P_F(S) = 0{,}2$

2) $P(F \cap S) = P(F) \times P_F(S) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$

F et $\bar{F}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(S) = P(F \cap S) + P(\bar{F} \cap S)$

$P(S) = 0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}7$

$P(S) = 0{,}12 + 0{,}28 = 0{,}4$

2) $P_S(F) = \frac{P(F \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}2}{0{,}4} = \frac{2 \times 0{,}3 \times \cancel{0{,}2}}{\cancel{0{,}4}}$

$P_S(F) = 0{,}3$

Capacité 4 *Utiliser un arbre pondéré pour résoudre un problème de probabilités*

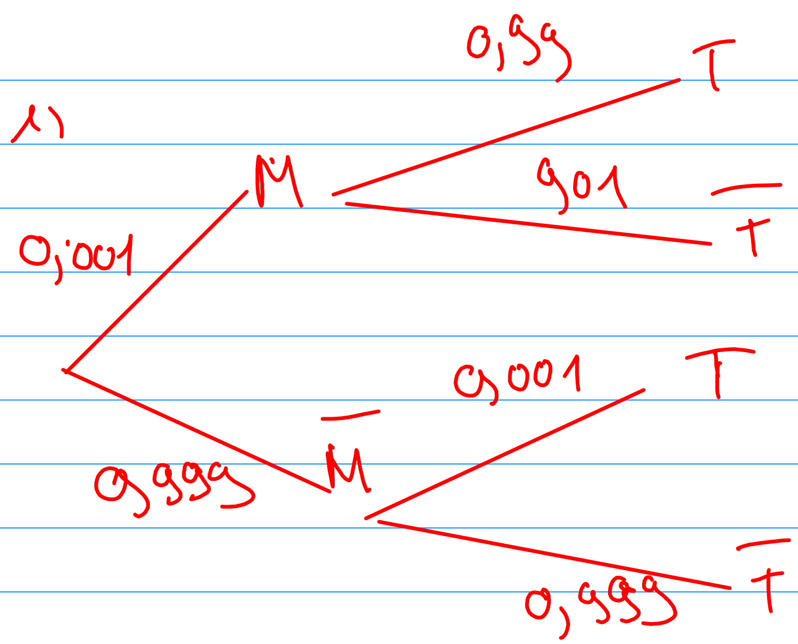
Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.
On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement «le test est positif».

1. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $M \cap T$.
3. Démontrer que la probabilité $\mathbb{P}(T)$ est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.
4. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier la réponse.
   Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

1)



2) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,001 \times 0,99$

$P(M \cap T) = 0,00099$

2) M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$

$P(T) = 0{,}00099 + 0{,}999 \times 0{,}001$

$P(T) = 0{,}00099 + 0{,}000999$

$P(T) = 0{,}001989 = 1{,}989 \times 10^{-3}$

2) $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}99 \times 10^{-3}}{1{,}989 \times 10^{-3}}$

$P_T(M) = \dfrac{990}{1989} < \dfrac{1}{2}$ car $990 \times 2 = 1980$

donc $990 \times 2 < 1989$

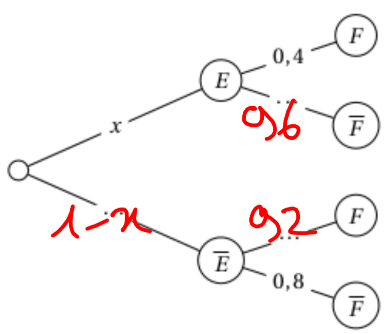
L'affirmation est donc vraie.

Capacité 5 ***Traduire la formule des probabilités totales par une équation***

Un univers Ω est muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$.

On considère deux événements E et F et on note respectivement $\overline{E}$ et $\overline{F}$ leurs événements contraires.

On sait que $\mathbb{P}(F) = 0,35$ et on donne l'arbre de pondéré de probabilités ci-dessous où $x = \mathbb{P}(E)$.



1. Exprimer $\mathbb{P}(\overline{E})$ en fonction de $x = \mathbb{P}(E)$.
2. Déterminer la probabilité que l'événement F soit réalisé sachant que l'événement $\overline{E}$ est réalisé.
3. Recopier l'arbre pondéré en complétant les probabilités manquantes.
4. Exprimer la probabilité de l'événement F en fonction de x et en déduire la valeur de $x = \mathbb{P}(E)$.

1) $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - x$

2) $P_{\overline{E}}(F) = 1 - P_{\overline{E}}(\overline{F}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

3) E et $\overline{E}$ forment une partition de l'uni-
-vers donc d'après la formule des probabi-

- lités totales :

$P(F) = P(E \cap F) + P(\bar{E} \cap F)$

$P(F) = x \times 0{,}4 + (1-x) \times 0{,}2$

$P(F) = 0{,}4x + 0{,}2 - 0{,}2x = 0{,}2 + 0{,}2x$

Or on nous donne $P(F) = 0{,}35$

donc on résout $0{,}2 + 0{,}2x = 0{,}35$

qui équivaut à $0{,}2x = 0{,}15$

qui équivaut à $x = \frac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}15 \times 5$

$x = 0{,}75$

72 Guirlandes de Noël

Une entreprise dispose d'un stock de guirlandes électriques. On sait que 40 % des guirlandes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B. Un quart des guirlandes provenant du fournisseur A et un tiers des guirlandes provenant du fournisseur B peuvent être utilisées uniquement en intérieur pour des raisons de sécurité. Les autres guirlandes peuvent être utilisées aussi bien en intérieur qu'en extérieur.

$P(A) = 0,4$

$P_A(I) = \frac{1}{4}$

$P_{\overline{A}}(I) = \frac{1}{3}$

On choisit au hasard une guirlande dans le stock.
On note les événements :

- A : « La guirlande provient du fournisseur A. »
- I : « La guirlande peut être utilisée uniquement en intérieur. »

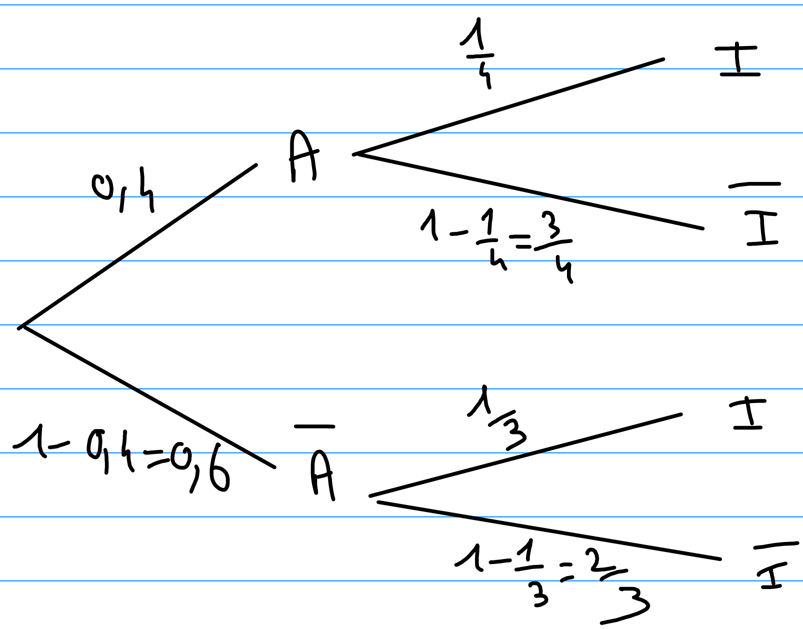
1. Donner $p(A)$, $p_A(I)$ et $p_{\overline{A}}(I)$.
2. Construire un arbre de probabilités décrivant la situation.
3. Montrer que la probabilité $p(I)$ de l'événement I est 0,3.
4. On choisit une guirlande pouvant être utilisée aussi bien en intérieur qu'en extérieur. Le responsable de l'entreprise estime qu'il y a autant de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. Le responsable a-t-il raison ? Justifier.

(*D'après Bac* 2018 *Centres étrangers TES*)

1) $p(A) = \frac{40}{100} = 0,4$

$P_A(I) = \frac{1}{4}$ et $P_{\bar{A}}(I) = \frac{1}{3}$

2)



3) A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(I) = P(A \cap I) + P(\bar{A} \cap I)$$

$$P(I) = P(A) \times P_A(I) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(I)$$

$$P(I) = 0,4 \times \frac{1}{4} + 0,6 \times \frac{1}{3}$$

$$P(I) = 0,1 + 0,2 = 0,3$$

2) On va calculer la probabilité qu'une guirlande provienne du fournisseur A sachant qu'elle peut être utilisée autant en extérieur qu'en intérieur ($\bar{I}$).

On calcule donc la probabilité conditionnelle $P_{\overline{I}}(A)$:

$$P_{\overline{I}}(A) = \frac{P(\overline{I} \cap A)}{P(\overline{I})} = \frac{0{,}4 \times \frac{3}{4}}{1 - P(I)}$$

$$P_{\overline{I}}(A) = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7}$$

On a $\frac{3}{7} < \frac{1}{2}$ donc il est faux d'affirmer qu'une guirlande pouvant être utilisée en extérieur a autant de chances de provenir de A que de B.