Correction des exemples du cours

Capacité 1

Une usine fabrique des toiles de pergola. Ces toiles peuvent présenter deux types de défauts :

- Un défaut de couleur de la toile ;
- un défaut d'étanchéité de la toile.

Sur un lot de 200 toiles, on obtient les résultats présentés dans le tableau croisé d'effectifs ci-dessous :

	Présente un défaut d'étanchéité (E)	Ne présente pas de défaut d'étanchéité ($\overline{E}$)	Total
Présente un défaut de couleur (C)	8	8	16
Ne présente pas de défaut de couleur ($\overline{C}$)	4	180	184
Total	12	188	200

1) Les individus étudiés sont des toiles de pergola.
Les caractères étudiés sont "Défaut de couleur" et "Défaut d'étanchéité".

2) 8 toiles présentent un défaut d'étanchéité et de couleur. $n(C \cap E) = 8$

2) $\overline{C} \cap E$ est l'ensemble des toiles présentant aucun défaut de couleur et un défaut d'étanchéité
$n(\overline{C} \cap E) = 4$

3) 16 toiles présentent un défaut de couleur.
$n(C) = 16$ est l'effectif marginal de la valeur C.

4) $n(\overline{C}) = 200 - n(C) = 184$ $\quad n(E) = 8 + 4 = 12$

$n(\bar{E}) = 200 - n(E) = 200 - 12 = 188$

Capacité 2 ***Construire un tableau d'effectifs***

Une entreprise comprend 750 employés dont 300 cadres. De plus 60 cadres et 28 des autres employés parlent l'anglais.

Compléter le tableau croisé d'effectifs :

	Cadre C	Non cadre $\overline{C}$	Total
Parle anglais A	60	28	88
Ne parle pas anglais $\overline{A}$	$300-60=240$	$450-28=422$	$750-88=662$
Total	300	$750-300=450$	750

Capacité 3 ***Calculer des fréquences marginales à partir d'un tableau d'effectifs***

On reprend la situation de la capacité 1.

1. Pour chacune des valeurs C et $\overline{C}$ du caractère *défaut de couleur*, puis E et $\overline{E}$ du caractère *défaut d'étanchéité*, calculer leur fréquence marginale.
2. Que vaut la somme des fréquences marginales des valeurs du caractère *défaut de couleur*? Explication?
3. Que vaut la somme de toutes les fréquences marginales en colonne?

Rappel du tableau croisé d'effectifs.

	Présente un défaut d'étanchéité (E)	Ne présente pas de défaut d'étanchéité ($\overline{E}$)	Total
Présente un défaut de couleur (C)	8	8	16
Ne présente pas de défaut de couleur ($\overline{C}$)	4	180	184
Total	12	188	200

1) Fréquences marginales :

$f(E) = \frac{12}{200} = 0{,}06$ et $f(\bar{E}) = \frac{188}{200} = 0{,}94$

$f(C) = \frac{16}{200} = 0{,}08$ et $f(\bar{C}) = 0{,}92$

2) La somme des fréquences marginales des valeurs du caractère "Défaut de couleur" est :

$f(C)+f(\overline{C})=1$ En effet une toile a un défaut de couleur ou n'en a pas.

3) La somme de toutes les fréquences marginales du caractère "Défaut d'étanchéité" est 1 également.

Capacité 4 ***Calculer des fréquences conditionnelles à partir d'un tableau d'effectifs***

On reprend la situation de la capacité 2.

1. Calculer la fréquence des cadres qui parlent anglais parmi la population totale.
2. Calculer la fréquence conditionnelle des cadres parmi les employés qui parlent anglais. Comment la note-t-on ?
3. Que représente la fréquence conditionnelle $f_C(A)$? La calculer.
4. La capacité d'un employé à parler anglais dépend-elle du fait qu'il soit cadre ou non ? Justifier.

On rappelle le tableau croisé d'effectifs

	Cadre C	Non cadre $\overline{C}$	Total
Parle anglais A	60	28	88
Ne parle pas anglais $\overline{A}$	$300-60=240$	$450-28=422$	$750-88=662$
Total	300	$750-300=450$	750

1) La fréquence des cadres qui parlent anglais parmi la population totale est de $\frac{60}{750}=\frac{6}{75}=\frac{2}{25}=0{,}04$

2) La fréquence conditionnelle des cadres parmi les employés qui parlent anglais est $f_A(C)=\frac{60}{88}=\frac{15}{22}$

3) $f_C(A)$ est la fréquence de personnes qui parlent Anglais parmi les cadres :

$$f_C(A) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5} = 0,2$$

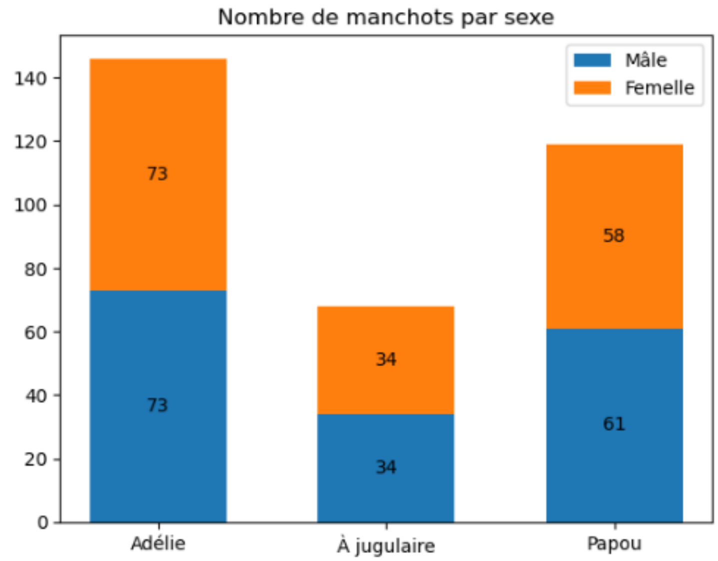
4) $f_{\overline{C}}(A)$ est la fréquence de personnes qui parlent Anglais parmi les non cadres.

$$f_{\overline{C}}(A) = \frac{28}{450} = \frac{28 \times \frac{2}{9}}{100} = \frac{\frac{56}{9}}{100} = \frac{6 + \frac{2}{9}}{100} \simeq 0,0622...$$

- $f_{\overline{C}}(A)$ est plus de trois fois inférieure à $f_C(A)$ donc on peut affirmer que la capacité d'un employé à parler dépend de son statut.

Capacité 5

Les données représentées par le diagramme en barres ci-dessous ont été récoltées par le docteur Kristen Gorman à la station Palmer en Antarctique. https://allisonhorst.github.io/palmerpenguins/



1. Quels sont les deux caractères étudiés?
2. Représenter ces données dans un tableau croisé d'effectifs.
3. Calculer la fréquence marginale des manchots papous.
4. Calculer la fréquence marginale des manchots femelles.
5. Calculer la fréquence conditionnelle des manchots femelle parmi les manchots papous.
6. Calculer la fréquence conditionnelle des manchots papous parmi les manchots femelles.

1) Les deux caractères étudiés sont l'espèce et le genre du manchot.

2)

Genre \ Espèce	Adélie	A jugulaire	Papou	Total
Mâle	73	34	61	168
Femelle	73	34	58	165
Total	146	68	119	333

3) Fréquence marginale des manchots papous :

$\frac{119}{333}$

4) Fréquence marginale des manchots femelles :

$$\frac{165}{333}$$

5) Fréquence conditionnelle des manchots femelles parmi les manchots papous :

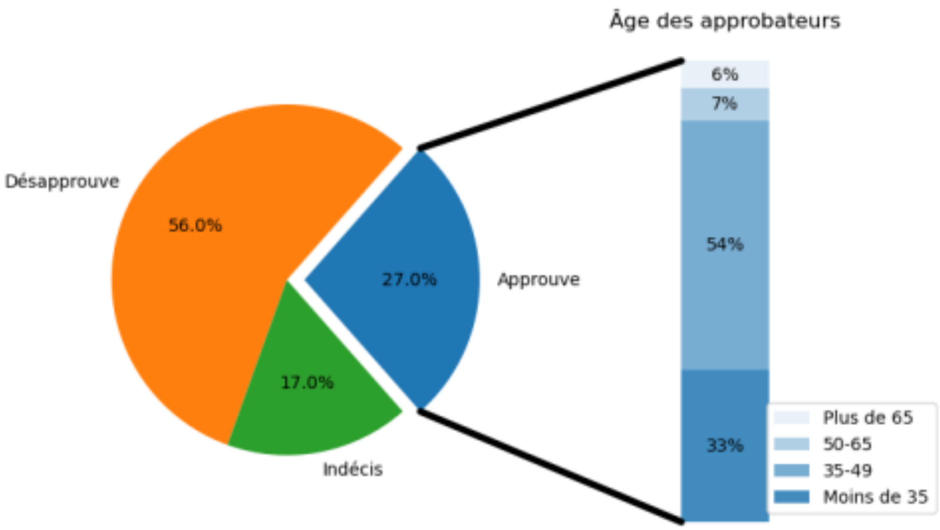
$$\frac{58}{119}$$

6) Fréquence conditionnelle des manchots papous parmi les manchots femelles :

$$\frac{58}{165}$$

Capacité 6

Le diagramme circulaire ci-dessous représente les résultats d'un sondage à propos d'un projet de piétonisation des rues devant l'entrée des écoles primaires d'une commune.



1. Déterminer la fréquence des personnes qui désapprouvent le projet par rapport à l'ensemble des personnes sondées. 0,56
2. Déterminer la fréquence conditionnelle des plus de 50 ans parmi les personnes sondées qui approuvent le projet. 6% + 7% = 13% soit 0,13
3. Déterminer la fréquence des personnes sondées qui ont plus de 50 ans et qui approuvent le projet par rapport à l'ensemble des personnes sondées. 0,13 × 0,27 = 0,0351

Capacité 7 ***Calculer une probabilité avec un tableau d'effectifs***

Une classe de première comporte 33 élèves. 15 pratiquent le hand-ball (noté H), 8 le tennis (noté T) et 17 ne pratiquent ni l'un ni l'autre. On choisit un élève au hasard dans cette classe.

Calculer la probabilité qu'il pratique :

- les deux sports;
- l'un au moins des deux sports.

	H	$\overline{H}$	Total
T			8
$\overline{T}$		17	
Total	15		33

L'évènement "L'élève choisi pratique les deux sports" correspond à $H \cap T$.

Pour obtenir la probabilité $P(H \cap T)$, puisqu'on est en situation d'équiprobabilité on va calculer :

$$\frac{\text{Effectif de } H \cap T}{\text{Effectif Total}}$$

On complète le tableau :

	H	$\overline{H}$	Total
T	$15-8=7$	$8-7=1$	8
$\overline{T}$	$25-17=8$	17	$33-8=25$
Total	15	$17+1=18$	33

L'évènement "L'élève choisi pratique au moins l'un des deux sports" correspond à $H \cup T$.

$$P(H \cup T) = P(H) + P(T) - P(H \cap T)$$

$$P(H \cup T) = \frac{15}{33} + \frac{8}{33} - \frac{7}{33} = \frac{16}{33}$$

Capacité 8 ***Calculer des probabilités conditionnelles avec un tableau croisé d'effectifs***

Un nouveau logiciel permet de filtrer les messages sur une messagerie électronique.
Les concepteurs l'ont testé pour 1 000 messages et voici leurs conclusions :

- 70 % des messages entrants sont indésirables ;
- 95 % des messages indésirables sont éliminés ;
- 2 % des messages bienvenus sont éliminés.

On considère les événements B : « le message est bienvenu », I : « le message est indésirable », E : « le message est éliminé » et C : « le message est conservé ».

1. Compléter le tableau suivant :

	Nombre de messages indésirables (I)	Nombre de messages bienvenus (B)	Total
E Nombre de messages éliminés	$\frac{95}{100}\times 700 = 665$	$\frac{2}{100}\times 300 = 6$	$665+6=671$
C Nombre de messages conservés	$700-665=35$	$300-6=294$	$35+294=329$
Total	$\frac{70}{100}\times 1000 = 700$	$1000-700 = 300$	1 000

2. Un message est reçu. Utiliser le tableau précédent pour calculer les probabilités demandées ci-dessous. Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

a. Exprimer en français les probabilités $\mathbb{P}_C(B)$ et $\mathbb{P}(B\cap C)$.

b. ~~Calculer~~ Déterminer la probabilité conditionnelle de E sachant I.

---

c. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(B\cap E)$ et $\mathbb{P}(E\cap I)$.

d. Calculer la probabilité pour que le message soit indésirable sachant qu'il est éliminé.

2) a) $P_C(B) = \frac{294}{329} \approx 0{,}893$ à 10^{-3} près $\quad P(B\cap C) = \frac{294}{1000} = 0{,}294$

b) $P_I(E) = \frac{665}{700} = 0{,}95$ (donnée de l'énoncé)

c) $P(B\cap E) = \frac{6}{1000} = 0{,}006 \quad P(E\cap I) = \frac{665}{1000} = 0{,}665$

d) $P_E(I) = \frac{665}{671} \approx 0{,}991$ à 10^{-3} près.

Capacité 9 ***Application des probabilités conditionnelles aux tests médicaux***

Pour établir un diagnostic, un médecin peut utiliser un test. Ce dernier n'étant jamais parfait, il faut prendre en compte dans l'interprétation les erreurs possibles :

- ☞ un patient peut avoir un test positif sans être malade, on parle de **faux positif** ;
- ☞ un patient peut avoir un test négatif en étant malade, on parle de **faux négatif**.

Partie A : sensibilité et spécificité d'un test diagnostique

Les propriétés intrinsèques d'un test sont sa **sensibilité** et sa **spécificité** :

- ☞ la **sensibilité** est la probabilité que le test soit positif sachant que le patient est malade ;
- ☞ la **spécificité** est la probabilité que le test soit négatif sachant que le patient n'est pas malade.

Ces propriétés sont calculées sur un échantillon de patients dont on connaît l'état (malade ou non) à l'aide d'un autre test considéré comme sûr.

1. Quelles seraient la sensibilité et la spécificité d'un test parfait ?

2. Afin d'établir les propriétés d'un nouveau test, un laboratoire fait subir ce test à 800 malades et 800 non malades. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-contre.

		M	$\overline{M}$	
		Malade	Non malade	Total
T	Test positif	672	160	832
$\overline{T}$	Test négatif	128	640	768
	Total	800	800	1600

   a. Vérifier que la sensibilité de ce test est égale à 0,84.
   b. En déduire la probabilité qu'un patient malade ait un test négatif (taux de faux négatifs).
   c. Calculer la spécificité de ce test.
   d. En déduire la probabilité qu'un patient non malade ait un test positif (taux de faux positifs).

1) La sensibilité et la spécifité d'un test parfait seraient de 100%.

2)

a) Sensibilité $= P_M(T) = \dfrac{672}{800} = 0{,}84$

b) Taux de faux négatifs $= 1 -$ Sensibilité $= 1 - 0{,}84 = 0{,}16$
car $P_M(\overline{T}) = 1 - P_M(T)$

c) Spécificité $= P_{\overline{M}}(\overline{T}) = \dfrac{640}{800} = 0{,}8$

d) Taux de faux positifs $= 1 -$ Spécificité $= 0{,}2$

car $P_{\overline{M}}(T) = 1 - P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

Partie B : valeur prédictive d'un test diagnostique

Dans cette partie, on suppose que la sensibilité d'un test est de 0,9 et que sa spécificité est de 0,8. Ce test est réalisé sur 1000 patients. On fait l'hypothèse que 75 % des patients sont malades.

1. Construire un tableau similaire à celui de la partie A.
2. Un patient a un test positif. Déterminer la probabilité qu'il soit malade.
   Cette probabilité est la **valeur prédictive positive** notée **VPP**.
3. Un patient a un test négatif. Déterminer la probabilité qu'il ne soit pas malade.
   Cette probabilité est la **valeur prédictive négative** notée **VPN**.

	Malade M	Non Malade $\overline{M}$	Total
Test positif T	$0{,}9 \times 750 = 675$	$250 - 200 = 50$	$675 + 50 = 725$
Test négatif $\overline{T}$	$750 - 675 = 75$	$0{,}8 \times 250 = 200$	$1000 - 725 = 275$
Total	$\frac{75}{100} \times 1000 = 750$	$1000 - 750 = 250$	1000

2) $VPP = P_T(M) = \frac{675}{725} \approx 0{,}931$ à 10^{-3} près

$VPN = P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{200}{275} \approx 0{,}727$ à 10^{-3} près