

Croissance exponentielle Modèle discret

Activité 1

Marc a créé un site internet au premier Janvier 2024. Fin Janvier 2024 son site a deux visites : une visite de sa part et une autre visite.

Depuis son ouverture, le nombre de visites mensuelles du site de Marc évolue selon le modèle suivant : par rapport au mois précédent, Marc réalise chaque mois deux visites supplémentaires de son site et le nombre total de visites (les siennes et celles des autres) double.

Au cours du $n^{\text{ième}}$ mois après Décembre 2023 avec n entier supérieur ou égal à 1, ont été réalisées :

- $u(n)$ visites par Marc;
- $v(n)$ visites au total (celles de Marc plus celles des autres).

Par exemple, 1 mois après Décembre 2023, en Janvier 2024, on a décompté :

- $u(1) = 1$ visite de Marc;
- $v(1) = 2$ visites au total.

On donne ci-dessous la copie d'une feuille de tableur avec les premières valeurs de $u(n)$ et $v(n)$:

Tableur

	A	B	C
1	n	$u(n)$	$v(n)$
2	1	1	2
3	2	3	4
4	3	5	8
5	4	7	16

1) Pour compléter le tableur, on écrit en B3 la formule : $=B2+2$

et en C3 la formule : $=C2*2$

2) le nombre de visites autres que celles de Marc en Mars 2024 était de :
 $v(3) - u(3) = 8 - 5 = 3$

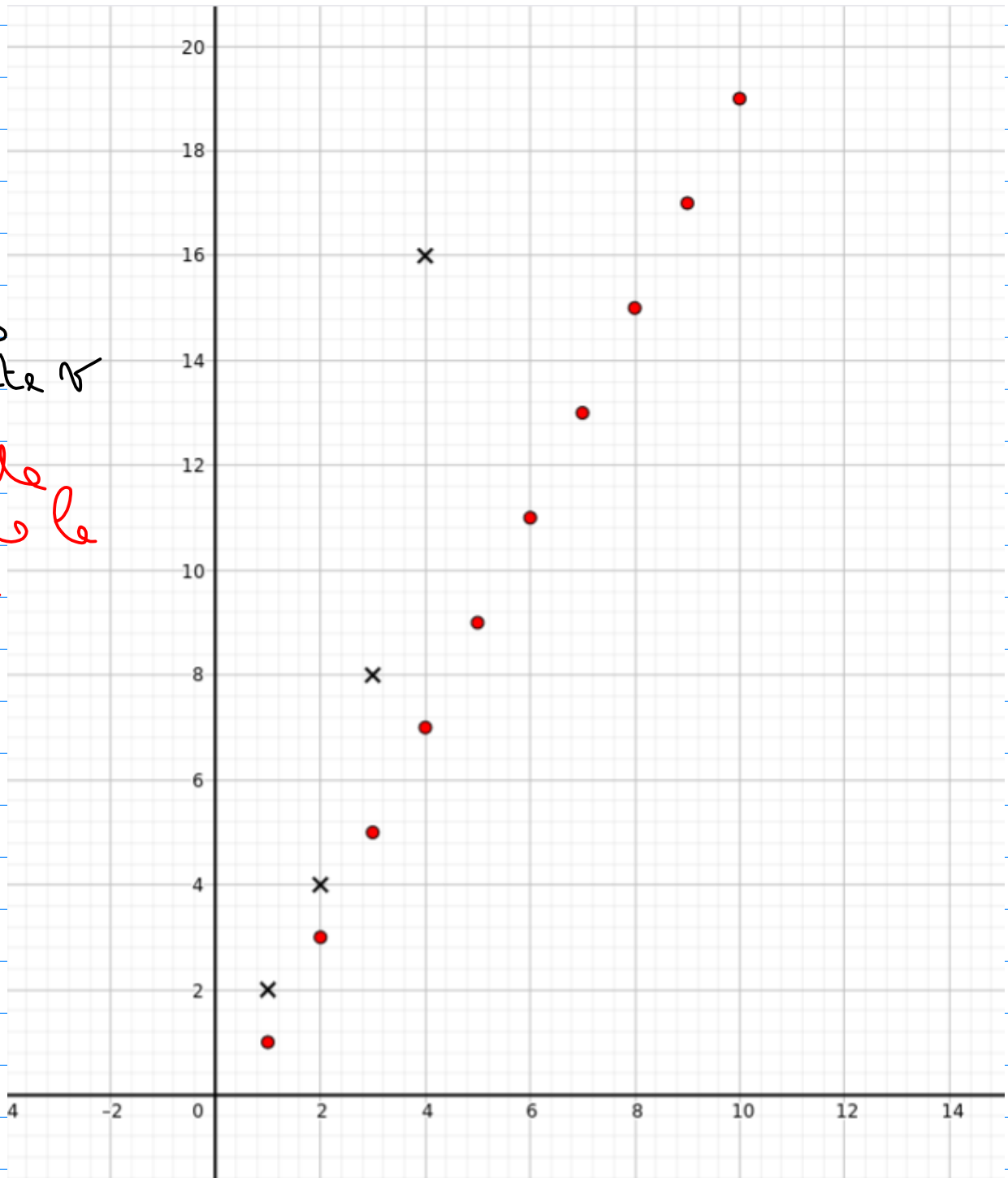
3) a)

a)

légende

x nuage de points de la suite \mathcal{V}

o nuage de points de la suite \mathcal{U}



b) Les points du nuage de points de la suite \mathcal{U} sont alignés donc elle peut modéliser une évolution linéaire.

Les points du nuage de points de la suite \mathcal{V} ne sont pas alignés donc elle ne peut pas modéliser une

évolution linéaire.

4) a) Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$u(n+1) = u(n) + 2$$

La suite u est donc arithmétique de raison 2.

b) D'après une propriété des suites arithmétiques, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$u(n) = u(1) + (n-1) \times 2$$

$$u(n) = 1 + n \times 2 - 2 = 2n - 1$$

5) a) Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$v(n+1) = v(n) \times 2$$

b) Taux d'évolution :

Formule :
$$\frac{\text{Valeur Finale} - \text{Valeur Initiale}}{\text{Valeur Initiale}}$$

Taux d'évolution entre $v(1)$ et $v(2)$:

$$\frac{v(2) - v(1)}{v(1)} = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ soit } 100\%$$

Taux d'évolution entre $v(2)$ et $v(3)$:

$$\frac{v(3) - v(2)}{v(2)} = \frac{8 - 4}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ soit } 100\%$$

Taux d'évolution entre $v(3)$ et $v(4)$:

$$\frac{v(4) - v(3)}{v(3)} = \frac{16 - 8}{8} = \frac{8}{8} = 1 \text{ soit } 100\%$$

c) Taux d'évolution entre $v(n)$ et $v(n+1)$ pour $n \geq 1$:

$$\frac{v(n+1) - v(n)}{v(n)} = \frac{2v(n) - v(n)}{v(n)} = \frac{v(n)}{v(n)} = 1$$

soit 100 %

d) Formule explicite donnant $v(n)$ en fonction de n pour un entier $n \geq 1$:

$$v(n) = v(1) \times 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

b) Le nombre de visites de Marc au boui de n mois est $\mu(n) = 2n - 1$

$$\mu(n) > 1000 \Leftrightarrow 2n - 1 > 1000$$

$$\Leftrightarrow 2n > 1001$$

$$\Leftrightarrow n > 500,5$$

Or n est un entier, donc le nombre

Le nombre de visites de Marc dépasse 1000 à partir de $n = 501$

Pour déterminer au bout de combien de mois, le nombre total de visites $v(n)$ dépasse 1000, on utilise le tableau.

	A	B	C	
1	n	u(n)	v(n)	
2	1	1	2	2^1
3	2	3	4	2^2
4	3	5	8	2^3
5	4	7	16	2^4
6	5	9	32	2^5
7	6	11	64	2^6
8	7	13	128	2^7
9	8	15	256	2^8
10	9	17	512	2^9
11	10	19	1024	2^{10}
12	11	21	2048	
13	12	23	4096	
14				

Le plus petit entier n tel que $v_n = 2^n$

dépasse 1000 est 10

car $2^9 < 1000 < 2^{10}$

On peut remarquer que si les deux suites sont croissantes, la suite v croît beaucoup plus vite que la suite u .

Capacité 1 Caractériser une suite géométrique

1. Une suite u telle que $u(0) = 3$, $u(1) = 6$ et $u(2) = 10$ peut-elle être géométrique?
2. On note $v(n)$ la valeur d'une action, n mois après son introduction en bourse. Chaque mois, la valeur de l'action diminue de 2%. La suite v est-elle géométrique?



Évolution exponentielle discrète, suite géométrique

1EnsSc

3. On note $p(n)$ la population d'une ville n années après 2020. Chaque année la population augmente de 2,5%. La suite p est-elle géométrique?

$$1) \quad \frac{u(1)}{u(0)} = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{u(2)}{u(1)} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$2 \neq \frac{5}{3} \quad \text{donc} \quad \frac{u(1)}{u(0)} \neq \frac{u(2)}{u(1)}$$

donc la suite u n'est pas géométrique car le quotient de 2 termes successifs n'est pas constant.

2) Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$v(n+1) = v(n) \times \left(1 - \frac{25}{100}\right) = v(n) \times 0,75$$

la suite v est donc géométrique de raison 0,75

3) Pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$p(n+1) = p(n) \times \left(1 + \frac{2,5}{100}\right) = 1,025 \times p(n)$$

la suite p est donc géométrique de raison 1,025