Histoire 1

Isaac Newton (1642-1727) est un mathématicien et physicien anglais, père de la physique moderne et découvreur de la gravitation universelle dans son fameux *Principia* de 1687. En 1669 il écrit le *De analysi*, premier exposé rigoureux de *calcul infinitésimal*, basé sur le passage à la limite dans des séries infinies, où il introduit la notion de dérivée pour mesurer la variation instantanée d'une fonction qui peut s'interpréter comme un coût marginal si la fonction est un coût de production, une vitesse instantanée si la fonction est une distance ou la vitesse d'apparition ou de disparition d'une substance si la fonction représente sa concentration dans le sang.

1 Rappels sur les fonctions affines

Définition 1

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ où m et p sont des réels quelconques.

- Si $m = 0$ la fonction $f : x \mapsto p$ est une fonction affine de type **constante**.
- Si $p = 0$ la fonction $f : x \mapsto mx$ est une fonction affine de type **linéaire**.

Capacité 1 ***Identifier une fonction affine***

Dans chaque cas, exprimer y en fonction de x et déterminer s'il s'agit d'une fonction affine.

1. x est la longueur du rayon d'un disque et y est son périmètre.
2. x est la longueur du rayon d'un disque et y est son aire.
3. x est la longueur de l'arête d'un cube et y est son volume.
4. x est le prix d'un article et y son nouveau prix après une réduction de 20%.
5. x est la durée d'une course en taxi et y le tarif de la course sachant que le tarif est de 5 euros pour la prise en charge et de 0,75 euros par minute.

Propriété 1

Soit une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$.

☞ $(\mathscr{P}_1)$ Pour tous réels distincts a et b, on a $m = \boxed{\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$.

☞ $(\mathscr{P}_2)$ Dans un repère du plan, la propriété $(\mathscr{P}_1)$ se traduit par le fait que le rapport entre la différence des ordonnées et la différence des abscisses est constant pour tout couple de points A et B distincts de la courbe d'une fonction affine :

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\text{Différence des ordonnées}}{\text{Différence des abscisses}}}$$

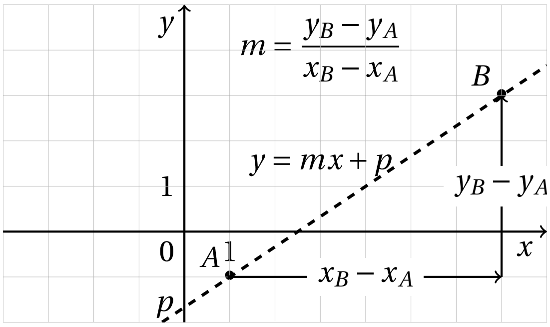
Le coefficient m est le **coefficient directeur** de la fonction affine $f : x \mapsto mx + p$.

☞ ($\mathscr{P}_3$) On peut déduire de la propriété ($\mathscr{P}_2$) que trois points quelconques de la courbe d'une fonction affine sont alignés et que la **courbe d'une fonction affine est une droite**.

La fonction affine $f : x \mapsto mx + p$ est représentée par une droite d'équation $\boxed{y = mx + p}$.

☞ **($\mathscr{P}_4$) La droite représentant une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$. coupe l'axe des ordonnées du repère au point de coordonnées $(0\,;\,p)$.**

Le coefficient p est l'**ordonnée à l'origine** de la fonction affine $f : x \mapsto mx + p$.



Capacité 2 *Déterminer un coefficient directeur*

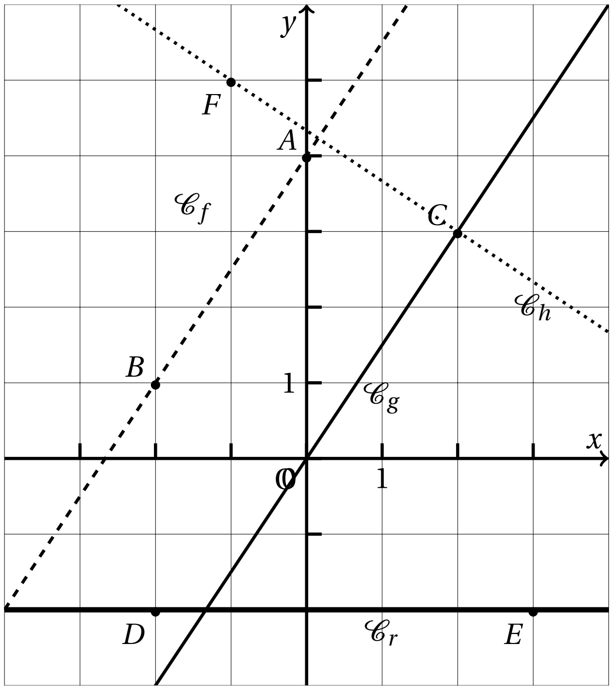
1. Représenter dans le même repère les fonctions affines : $f : x \mapsto 1 - 2x \qquad g : x \mapsto \dfrac{1}{2}x \qquad h : x \mapsto 2$.

2. Dans un repère on a représenté quatre fonctions affines f, g, h et r :

- $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A\,(0\,;\,4)$ et $B\,(-2\,;\,1)$.
- $\mathscr{C}_g$ passe par les points $O\,(0\,;\,0)$ et $C\,(2\,;\,3)$.
- $\mathscr{C}_h$ passe par les points $C\,(2\,;\,3)$ et $F\,(-1\,;\,5)$.
- $\mathscr{C}_r$ passe par les points $D\,(-2\,;\,-2)$ et $E\,(3\,;\,-2)$.

a. Pour chaque fonction affine : déterminer par le calcul son coefficient directeur m puis son ordonnée à l'origine p, en déduire l'équation de la droite, enfin vérifier la cohérence des résultats avec le graphique.

b. Représenter graphiquement la droite $\mathscr{D}_1$ passant par A et de coefficient directeur $\dfrac{1}{3}$ et la droite $\mathscr{D}_2$ passant par C et de coefficient directeur -2.

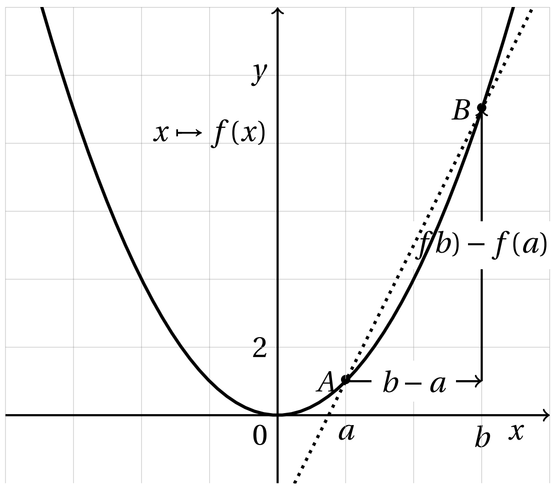


2 Sécante et tangente à une courbe de fonction

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On considère deux réels distincts a et b appartenant à I et dans un repère du plan les points $A\left(a\,;\,f(a)\right)$ et $B\left(b\,;\,f(b)\right)$ appartenant à la courbe de f.
La droite (AB) est une **sécante** à la courbe de f.
Le coefficient directeur de la sécante (AB) est le **taux de variation** de f entre a et b :

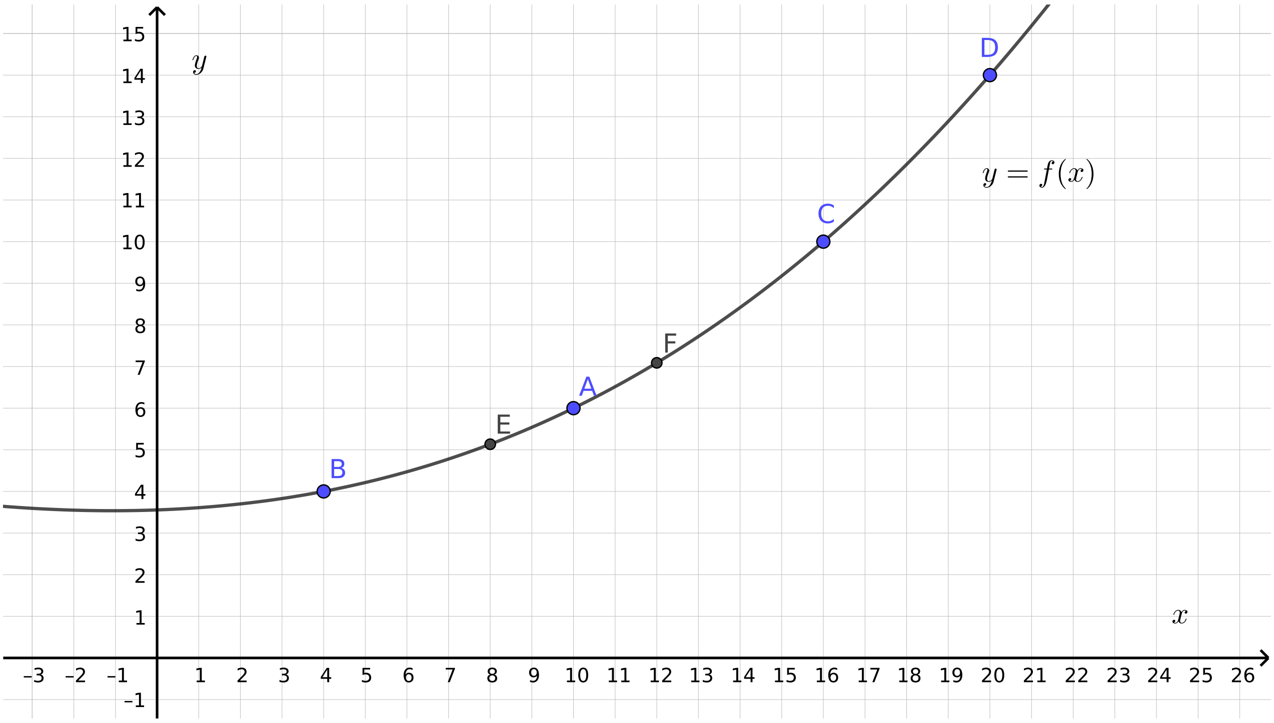
$$\boxed{\text{Taux de variation de } f \text{ entre } a \text{ et } b = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$



Capacité 3 ***Calculer un taux de variation et faire tendre les sécantes vers une position limite***

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne une partie de la représentation graphique ci-dessous dans un repère du plan.

La courbe de f passe par les points $A(10\,;\,6)$, $B(4\,;\,4)$, $C(16\,;\,10)$, $D(20\,;\,14)$, $E\left(8\,;\,\dfrac{77}{15}\right)$ et $F\left(12\,;\,\dfrac{319}{45}\right)$.



1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

a	b	Taux de variation de f entre a et b	Coefficient directeur de la sécante
4	10	...	(AB)
8	10	...	...
12	10	...	...
16	10	...	...
20	10	...	...

2. Déterminer une équation de la droite Δ passant par A et de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

Tracer cette droite.

3. Placer d'abord sa règle sur la figure pour représenter une sécante à la courbe de f passant par A et un autre point M. Puis faire glisser M sur la courbe de f pour qu'il se rapproche de A.

Que peut-on dire de la position de la sécante (AM) par rapport à la droite Δ ?

3 Nombre dérivé et tangente en un point

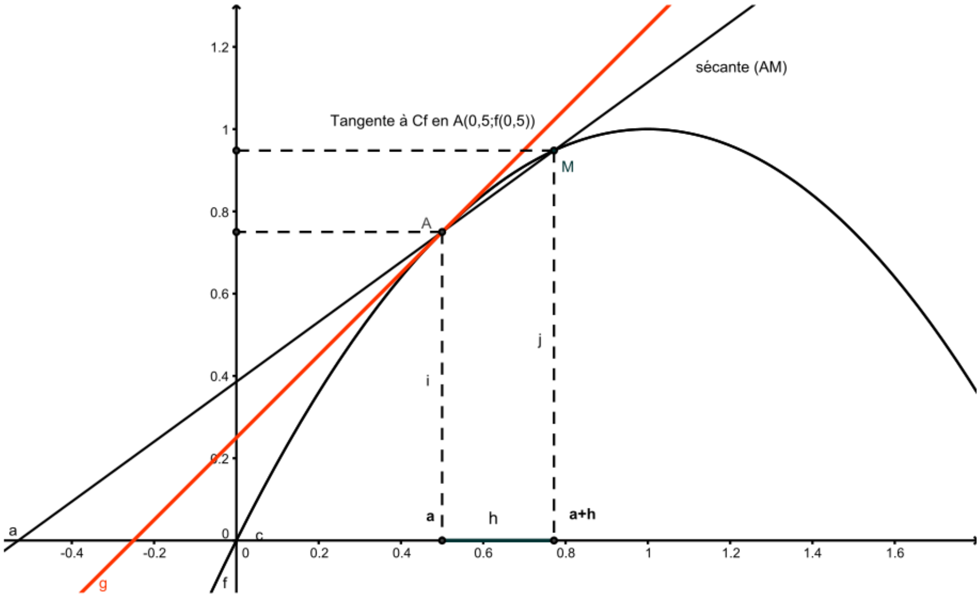
3.1 Fonction dérivable en un point

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
Dans un repère du plan, on considère le point A d'abscisse a et une sécante (AM) à la courbe de f.
Si lorsque M tend vers A, la sécante (AM) tend vers une position limite représentée par une droite T_A passant par A, alors on dit que la fonction f est **dérivable** en a.
Dans ce cas :

☞ la droite T_A position limite des sécantes (AM) est la **tangente** à la courbe de f en A;

☞ le coefficient directeur de la tangente T_A est le **nombre dérivé de** f **en** a et on le note $f'(a)$.



Tangente en $A(0,5\,;f(0,5))$ *à la courbe de la fonction* $f : x \mapsto -x^2+2x$

Remarque 1

On considère deux domaines classiques d'application :

- La *mécanique* où la distance parcourue par un mobile sur un axe peut s'exprimer en fonction du temps t comme une fonction de loi horaire $d(t)$.
- L'*économie* où la coût de production d'un objet manufacturé peut s'exprimer en fonction de la quantité q produite par une fonction de coût $C(q)$.

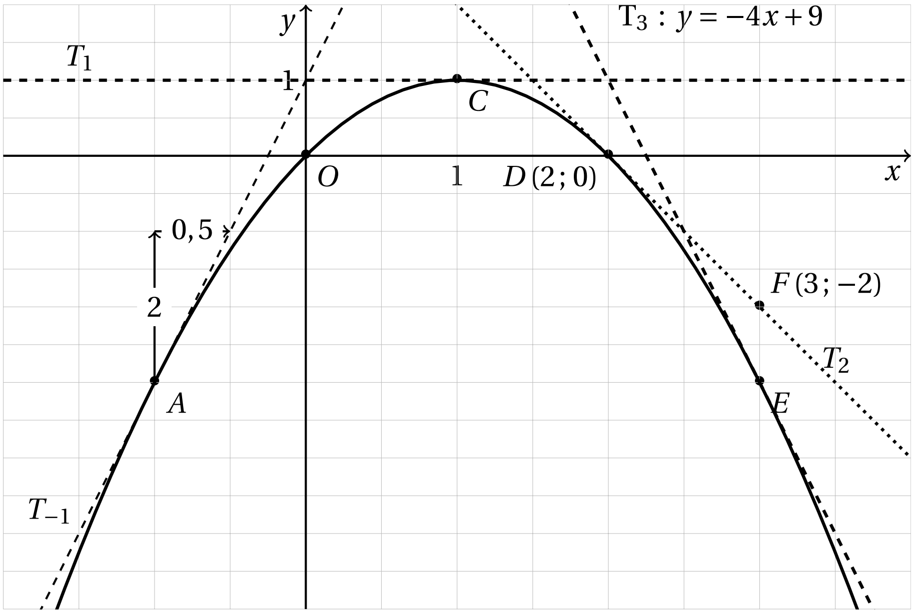
Le coefficient directeur d'une sécante à la courbe de la fonction s'interprète comme un taux de variation des valeurs de la fonction entre deux valeurs de la variable :

Domaine	*Fonction*	*Variable*	*Image*	*Taux de variation*	*Interprétation*
Cinématique	Loi horaire d	Temps t	Distance $d(t)$	$\dfrac{d(t)-d(a)}{t-a}$	Vitesse moyenne entre les instants a et t
Économie	Coût C	Quantité q	Coût $C(q)$	$\dfrac{C(q)-C(a)}{q-a}$	Coût moyen par unité supplémentaire quand on passe de a à q unités produites

Si on fixe un point de la sécante et qu'on fait tendre l'autre vers le point fixé, la sécante tend vers la position limite qui est la tangente, et le taux de variation tend vers un taux de variation instantané qui est le nombre dérivé au point fixé :

Domaine	*Fonction*	*Variable*	*Image*	*Unité du nombre dérivée*	*Interprétation*
Cinématique	Loi horaire d	Temps t	Distance $d(t)$	m/s	Vitesse instantanée
Économie	Coût C	Quantité q	Coût $C(q)$	euro/unité produite	Coût marginal

Capacité 4 *Déterminer graphiquement un nombre dérivé*



Sur le graphique précédent, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-2;4]$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

On admet que f est dérivable en -1, 0, 1, 2 et 3 et on a tracé les tangentes à $\mathscr{C}_f$:

- T_1 au point $C(1;1)$;
- T_2 au point $D(2;0)$;
- T_{-1} au point $A(-1;-3)$;
- T_3 au point $E(3;-3)$;

Avec les éléments présents sur le graphique, déterminer les nombres dérivés $f'(1)$, $f'(-1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

3.2 Équation de tangente

Propriété 2

Si f est une fonction dérivable en a, alors une équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Capacité 5 *Déterminer une équation de tangente à partir de la formule*

On considère une fonction f définie et dérivable en tout réel a.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

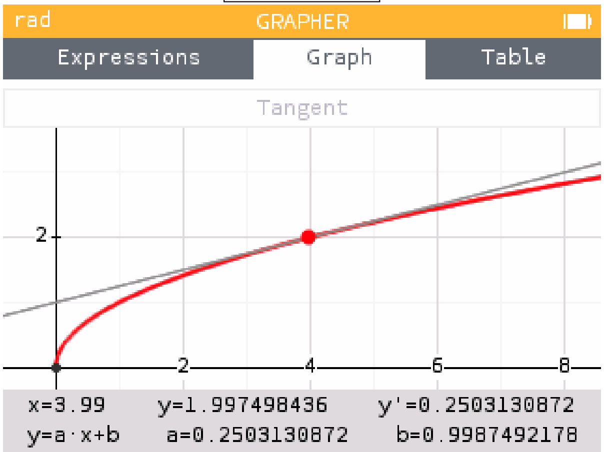
1. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est $y = -3x + 4$.
   Déterminer les valeurs de $f(2)$ et $f'(2)$.

2. On a $f(-3)=9$ et $f'(-3)=4$. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.

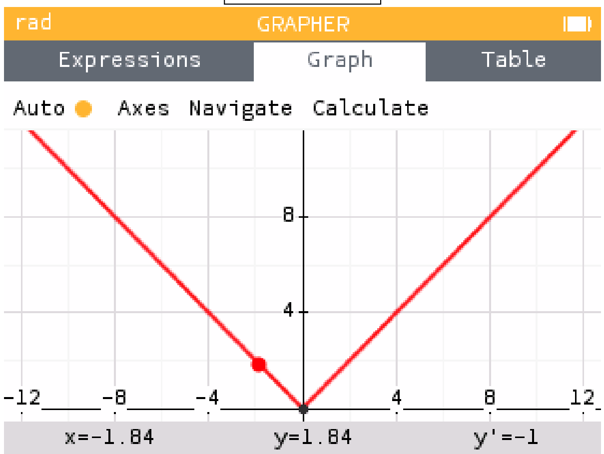
3.3 Fonction non dérivable en un point

Capacité 6 ***Identifier un point où une fonction n'est pas dérivable***

$\boxed{f : x \mapsto \sqrt{x}}$



$\boxed{g : x \mapsto |x|}$



1. On considère la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=|x|=\begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

   a. Représenter la courbe de f avec la calculatrice.

   b. Faire afficher le nombre dérivé et la tangente au point mobile. (*Sur Numworks, menu Grapheur / Graphique / Calculs / Dérivées et Grapheur / Graphique / Rechercher / Tangente*).

   c. Après avoir testé, plusieurs positions du point mobile, complétez :

   - Si $a<0$, le nombre dérivé $f'(a)$ est égal à ......
   - Si $a>0$, le nombre dérivé $f'(a)$ est égal à ......

   d. Quelle valeur est affichée pour le nombre dérivé en 0 ?

   e. Soit O l'origine du repère, quelle est la position limite des sécantes (OM) avec M d'abscisse négative ? Même question avec M d'abscisse positive.

   f. En déduire une explication pour la valeur affichée par la calculatrice pour le nombre dérivé en 0.

2. On considère la fonction racine carrée définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

   a. Représenter la courbe de f avec la calculatrice et faire afficher le nombre dérivé et la tangente au point mobile.

   b. Quelle valeur est affichée pour le nombre dérivé en 0 ?

   c. Soit O l'origine du repère, quelle est la position limite des sécantes (OM) avec M d'abscisse positive.

   d. En déduire une explication pour la valeur affichée par la calculatrice pour le nombre dérivé en 0.