

Histoire 1

Léonard de Pise, dit Fibonacci (1175 – 1240) est un mathématicien italien auteur du *Liber abaci* (1202), un recueil de problèmes algébriques, où il popularisa l'usage des chiffres arabes. Un énoncé est resté célèbre : « Possédant au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence? », il se modélise avec la suite $f_0 = f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. On démontre que le rapport f_{n+1} / f_n tend vers le nombre d'Or $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1 Notion de suite

Définition 1

Une suite est une fonction définie sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels, les entiers positifs ou nuls et à valeurs dans \mathbb{R} l'ensemble des réels.

Si u est le nom de la suite, l'image de n par u se note $u(n)$ (notation fonctionnelle) ou de manière plus usuelle u_n (notation indicielle). On l'appelle **terme** d'indice n ou de rang n de la suite u .

On peut désigner une suite u par la notation $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) .

	Fonction f	Suite u
Ensemble de définition	Un intervalle de réels	Un ensemble d'entiers naturels
Image	$f(4)$	$u(4)$ ou u_4 (notation indicielle)
Notation	Fonction f	u ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) .

Capacité 1 *Exprime le terme d'une suite en notation fonctionnelle ou indicielle*

Soit u une suite définie sur \mathbb{N} et à valeurs dans \mathbb{R} . Compléter le tableau ci-dessous par les écritures adaptées. Mette une croix si l'écriture n'existe pas. n est un entier naturel.

Indice	Notation fonctionnelle	Notation indicielle
n
0
$n + 1$
-1
$\sqrt{2}$
Terme de valeur $\sqrt{2}$

Capacité 2 Modéliser l'évolution d'une grandeur par une suite

1. Le tarif d'un taxi est de 10 euros de prise en charge et de 0,75 euros par minute à partir de la seconde minute.
 - a. Justifier que le tarif pour une course de 9 minutes est de 16 euros.
 - b. On note $u(n)$ le tarif d'une course de n minutes. Exprimer $u(n)$ en fonction de n .
 - c. À partir de quelle durée en minutes, le tarif de la course dépasse-t-il 60 euros?

2. On considère la suite de Syracuse s dont le premier terme est un entier positif $s(0)$ et dont les termes suivants se calculent ainsi :
 - Si le terme précédent est pair alors le nouveau terme s'obtient en le divisant par 2;
 - Sinon le nouveau terme s'obtient en ajoutant 1 au produit du terme précédent par 3.
 - a. Vérifier que si le premier terme est $s(0) = 4$ alors les termes suivants sont $s(1) = 2$, $s(2) = 1$ et $s(3) = 4$. Quelle conjecture peut-on faire sur les valeurs suivantes des termes de la suite? Quelle serait alors la valeur de $s(2024)$?
 - b. Reprendre le calcul des termes successifs de la suite avec pour valeur de $s(0)$ celle de votre jour de naissance. Recopier et compléter le tableau ci-dessous jusqu'à ce que $s(n) = 4$.

Indice n	0	1	2	3	4
Terme $s(n)$

Capacité 3 Maîtriser la notation indicielle

On considère la suite v définie pour tout entier naturel n par $v_n = (n + 3)^2$

1. Calculer v_4 .
2. Dans l'écriture $v_5 = 64$, quelle est la valeur de l'indice? du terme?
3. Déterminer le terme de la suite v d'indice 6.
4. Déterminer l'indice du terme de la suite de valeur 144.
5. Soit n un entier naturel, exprimer en fonction de n les formules permettant de calculer :

a. v_{n+1} ;

b. v_{2n} ;

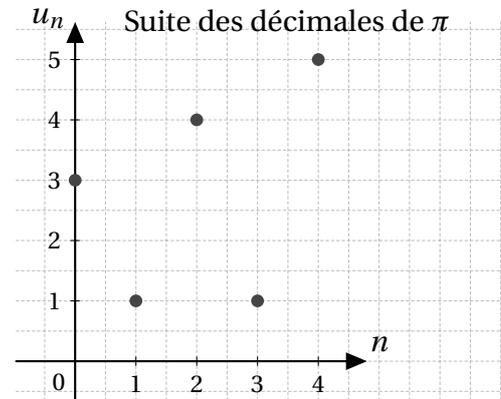
c. v_{n-1} .

2 Différents modes de génération d'une suite

2.1 Suite définie par extension

Définition 2

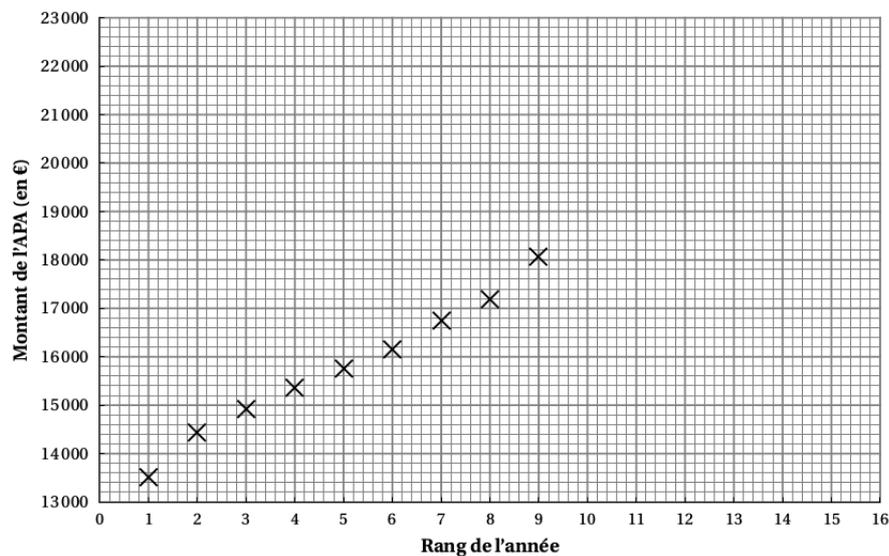
- Une suite est **définie par extension** si tous ses termes successifs nous sont donnés, comme par exemple une série statistique.
- Dans un repère, une suite (u_n) est représentée graphiquement par un **nuage de points** de coordonnées $(n; u_n)$.



Capacité 4 Utiliser plusieurs registres (graphique, algébrique) pour étudier une suite

L'Allocation Personnalisée d'Autonomie (APA) est une allocation destinée aux personnes âgées de 60 ans et plus en perte d'autonomie.

Une série statistique nous donne le montant en euros de l'APA dans un département fixé depuis 2007. On note $a(n)$ le montant pour l'année 2006 + n et le nuage de points ci-dessous représente les neuf premiers termes de la suite a .



1. a. Compléter le tableau ci-dessous par lecture graphique :

Indice n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a(n)$	13 504	...	14 914	15 351	15 751	16 144	16 744	...	18 070

- b. Quel était le montant de l'APA en 2013 ?

2. Le conseil départemental décide d'une augmentation de 5% par an à partir de 2015.

- a. Calculer $a(10)$ et compléter le nuage de points.

- b. Quelle formule faut-il saisir en C2 dans la feuille de calcul ci-dessous pour calculer le montant de l'APA à partir de 2015 ?

	A	B	C	D	E	F
1	n	9	10	11	12	13
2	$a(n)$	18 070

2.2 Suite définie par une formule de récurrence

Définition 3

Une suite u est définie par une **formule de récurrence** si son terme $u(n)$ s'exprime en fonction de termes d'indices inférieurs.

Capacité 5 *Modéliser une évolution avec une suite définie par récurrence*

Bob s'est fixé un objectif : participer à un marathon qui aura lieu très bientôt dans sa ville. Pour cela, il désire programmer sa préparation au marathon de la manière suivante :

- lors du premier entraînement, il décide de courir 20 km ;
- il augmente ensuite, à chaque entraînement, la distance à courir de 5 %.

On peut modéliser la distance parcourue lors de ses entraînements par une suite d , où, pour tout entier naturel n non nul, le nombre $d(n)$ désigne la distance à courir en kilomètre, lors de son n -ième entraînement.

On a ainsi $d(1) = 20$.

1. Calculer $d(2)$, puis vérifier que $d(3) = 22,05$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer $d(n+1)$ en fonction de $d(n)$.
3. Programmer le calcul des termes de cette suite d sur sa calculatrice avec le mode `suite` ou `recurrence`.
4. La distance à courir lors d'un marathon est de 42,195 km. Bob estime qu'il sera prêt pour la course, s'il parvient à courir au moins 43 km lors d'un de ses entraînements.

En calculant les termes successifs de la suite jusqu'à ce que le seuil de 43 km soit atteint, déterminer le nombre de jours d'entraînement nécessaires pour que Bob soit prêt pour le marathon.

Capacité 6 *Calculer des termes d'une suite définie par une relation de récurrence*

Soit la suite u définie par : $u(0) = 4$ et, pour tout entier naturel n , $u(n+1) = -\frac{1}{2}u(n) + 2$.

1. Détailler les calculs de $u(1)$ et $u(2)$.
2. Avec le mode `suite` ou `recurrence` de la calculatrice, calculer une valeur décimale approchée à 10^{-6} près de $u(14)$.

2.3 Suite définie par une formule explicite

 **Définition 4**

Une suite u est définie par une **formule explicite** si son terme $u(n)$ peut se calculer directement en fonction de n .

 **Capacité 7 Calculer les termes d'une suite définie explicitement**

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $v(n) = 3 + 4n$.

1. Calculer dans un tableau les valeurs des termes $v(n)$ avec $0 \leq n \leq 10$.
2. Représenter dans un repère le nuage des points de coordonnées $(n; v(n))$ avec $0 \leq n \leq 10$.
Que peut-on dire des onze points du nuage?
3. Déterminer l'indice du terme de valeur 147.
4. À partir quel indice n , a-t-on $v(n) > 995$?

3 Sens de variation d'une suite

 **Définition 5**

Soit u une suite définie sur l'ensemble des entiers naturels.

- ☞ u est **croissante** si pour tout entier $n \geq 0$, on a $u(n) \leq u(n+1)$.
- ☞ u est **décroissante** si pour tout entier $n \geq 0$, on a $u(n) \geq u(n+1)$.
- ☞ u est **monotone** si elle est **croissante** ou **décroissante**.
- ☞ u n'est pas monotone si

 **Capacité 8 Donner un exemple de suite croissante, décroissante ou non monotone.**

On considère une suite d réduite à six notes, celles obtenues par un élève en cours de mathématiques. On note $d(1)$, $d(2)$, $d(3)$, $d(4)$, $d(5)$ et $d(6)$ ces notes.

1. Donner un premier exemple où la suite d est croissante. Représenter la suite par un nuage de points.
2. Donner un second exemple où la suite d est décroissante. Représenter la suite par un nuage de points.
3. Donner un troisième exemple où la suite d n'est pas monotone. Représenter la suite par un nuage de points.