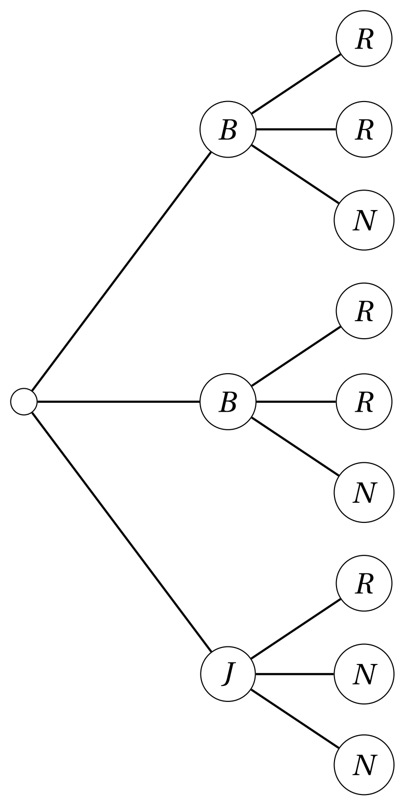
1 D'un arbre de dénombrement à un arbre pondéré

Activité 1

On considère une expérience aléatoire (E) constituée de la succession de deux expériences aléatoires E_1 et E_2 telles que le résultat de E_1 modifie l'expérience E_2 :

- (E1) : On effectue un premier tirage dans l'urne α contenant deux boules bleues B et une boule jaune J indiscernables au toucher;
- (E2) : L'urne choisie pour le deuxième tirage dépend de la couleur de la boule tirée au premier tirage.
  - Si on a tiré une boule bleue B dans l'urne α alors on effectue un deuxième tirage dans l'urne β qui contient deux boules rouges R et une boule noire N indiscernables au toucher.
  - Si on a tiré une boule jaune J dans l'urne α alors on effectue un deuxième tirage dans l'urne γ qui contient une boule rouge R et deux boules noires N indiscernables au toucher.

On a modélisé cette situation par **l'arbre de dénombrement** ci-dessous :



1. À l'aide de cet **arbre de dénombrement**, déterminer la probabilité de tirer une boule rouge lors d'une réalisation de l'expérience aléatoire (E).

2. Si on multipliait par 100 les nombres de boules de chaque couleur dans toutes les urnes, pourrait-on modéliser l'expérience aléatoire (E) à l'aide d'un arbre de dénombrement?

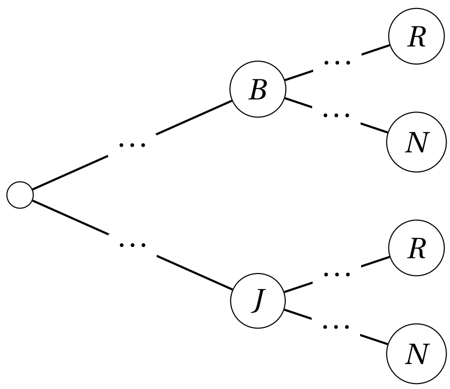
3. On propose une autre modélisation, à l'aide d'un **arbre pondéré de probabilités**, où les branches issues d'un même noeud et représentant la même couleur vont être fusionnées. De plus on va

les étiqueter avec la probabilité que la couleur à l'extrémité de la branche se réalise sachant que l'événement porté par le noeud origine de la branche est réalisé.

Dans notre exemple :

- Premier niveau : On construit deux branches d'extrémités B et J issues du noeud racine et on étiquette :
  - la branche d'extrémité B par la probabilité de tirer une boule bleue dans l'urne α donc par $\mathbb{P}(B) = \dots$
  - la branche d'extrémité J par la probabilité de tirer une boule jaune dans l'urne α donc par $\mathbb{P}(J) = \dots$.
- Second niveau : À partir des noeuds B et J construits au premier niveau, on construit deux branches d'extrémités R et N mais on les étiquette différemment :
  - pour les branches issues du noeud B, on tire dans l'urne β, donc :
    * on étiquette la branche d'extrémité R par la probabilité conditionnelle de tirer R sachant qu'on a tiré B au premier tirage, donc par $\mathbb{P}_B(R) = \dots$
    * on étiquette la branche d'extrémité N par la probabilité conditionnelle de tirer N sachant qu'on a tiré B au premier tirage, donc par $\mathbb{P}_B(N) = \dots$
  - pour les branches issues du noeud J, on tire dans l'urne γ, donc :
    * on étiquette la branche d'extrémité R par la probabilité conditionnelle de tirer R sachant qu'on a tiré J au premier tirage, donc par $\mathbb{P}_J(R) = \dots$
    * on étiquette la branche d'extrémité N par la probabilité conditionnelle de tirer N sachant qu'on a tiré J au premier tirage, donc par $\mathbb{P}_J(N) = \dots$

Compléter **l'arbre pondéré de probabilités** ci-dessous.



4. **a.** Déterminer la probabilité de l'événement B ∩ R = « Tirer une boule bleue au premier tirage **et** une boule rouge au second ».
A-t-on $\mathbb{P}(B \cap R) = \mathbb{P}_B(R)$?

b. Déterminer la probabilité de l'événement J ∩ R = « Tirer une boule jaune au premier tirage **et** une boule rouge au second ».
A-t-on $\mathbb{P}(J \cap R) = \mathbb{P}_J(R)$?

c. Retrouver la probabilité de l'événement R = « Tirer une boule rouge » déjà calculée avec l'arbre de dénombrement.

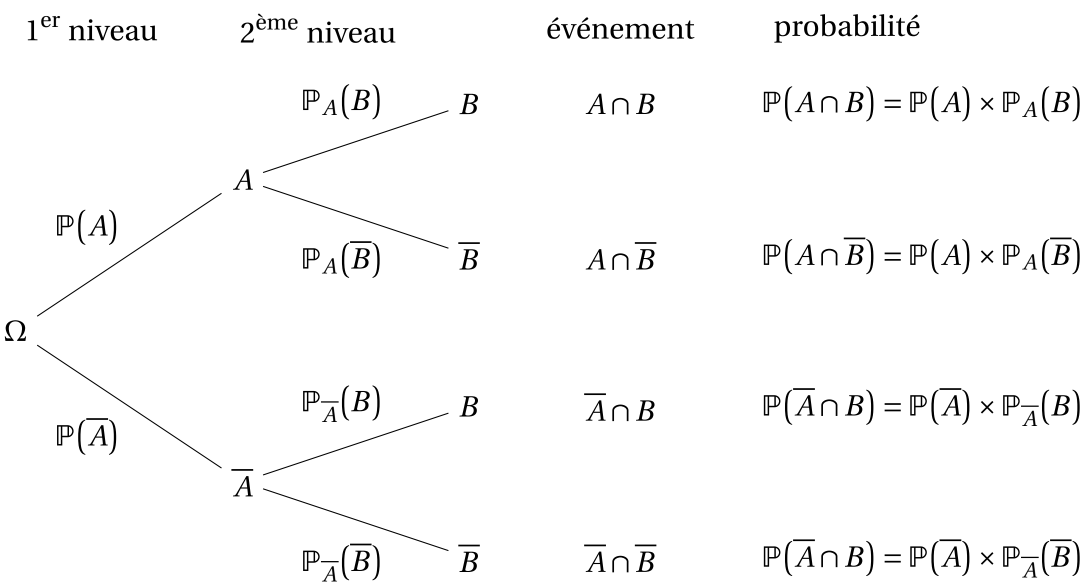
Classer dans l'ordre croissant les probabilités $\mathbb{P}(R)$, $\mathbb{P}_B(R)$ et $\mathbb{P}_J(R)$. Interpréter l'ordre obtenu.

5. L'arbre pondéré de probabilités serait-t-il modifié si on multipliait par 100 les nombres de boules de chaque couleur dans toutes les urnes ?

2 Propriétés d'un arbre pondéré

Méthode

On considère une loi de probabilité $\mathbb{P}$ définie sur l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire qui permet de définir la probabilité d'un événement A et les probabilités conditionnelles d'un événement B sachant que A ou $\overline{A}$ est réalisé. On peut modéliser cette situation par un arbre pondéré comme ci-dessous :



- Une **branche** de l'arbre relie deux événements ou **noeuds** et chaque branche porte une probabilité.
- Le noeud racine est Ω l'univers de l'expérience aléatoire.
- Les branches de **premier niveau** portent des probabilités comme $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(\overline{A})$ dont l'univers de référence est Ω.
- Les branches de **second niveau** portent des probabilités conditionnelles comme $\mathbb{P}_A(B)$ portée par la branche reliant un noeud A à un noeud B.
- Un **chemin** est une suite de branches de la racine Ω jusqu'à un noeud qui n'est pas prolongé par une branche (un tel noeud s'appelle une **feuille**).

Propriété 1

1. *Propriété des chemins* : Dans un arbre pondéré la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par les branches successives.

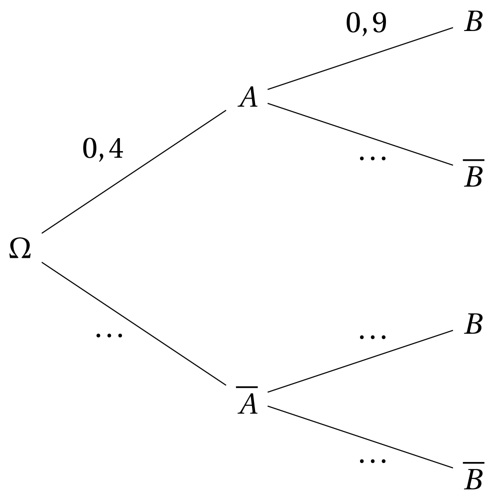
   Par exemple dans l'arbre donné en définition 1 on a : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$.

2. *Propriété des noeuds* : Dans un arbre pondéré la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même noeud doit être égale à 1.

   Par exemple dans l'arbre donné en définition 1 on a : $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = 1$.

Capacité 1 *Compléter un arbre de probabilités pondérées avec la propriété des noeuds*

Compléter les probabilités manquantes dans l'arbre pondéré de probabilités ci-dessous. On donne de plus $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0,15$.



Capacité 2 *Calculer une probabilité avec la propriété des chemins*

On reprend l'arbre pondéré de probabilités de la capacité 1.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

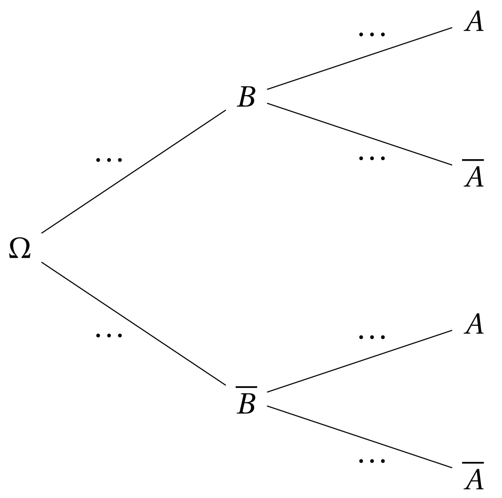
   a. $\mathbb{P}(A \cap B)$ **c.** $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$ **e.** $\mathbb{P}(B)$

   b. $\mathbb{P}_A(B)$ **d.** $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$ **f.** $\mathbb{P}(\overline{B})$

2. **a.** La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B(A)$ apparaît-elle dans l'arbre pondéré ?
   Sinon comment peut-on la calculer ?

   b. Calculer de même $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$

   c. Compléter l'arbre pondéré de probabilités ci-dessous :



3 Formule des probabilités totales

Propriété 2

Soit l'univers Ω d'une expérience aléatoire et $A \subset \Omega$ un événement.
A et son événement contraire $\overline{A}$ sont tels que :

- leur **intersection** est vide : $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- leur **réunion** est l'univers Ω : $A \cup \overline{A} = \Omega$

On dit que A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω.
On peut calculer la probabilité de n'importe quel autre événement $B \subset \Omega$ en considérant son intersection avec A et avec $\overline{A}$:

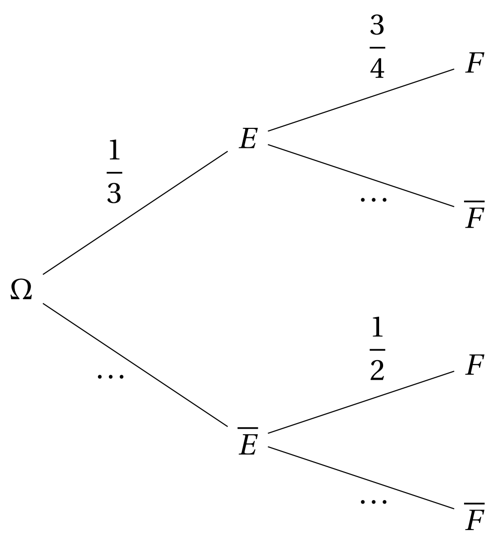
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

C'est la **formule des probabilités totales**.

Capacité 3 ***Appliquer la formule des probabilités totales***

On considère l'arbre pondéré de probabilités ci-contre.

1. Compléter les probabilités manquantes dans l'arbre.
2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(E \cap F)$.
3. En appliquant la formule des probabilités totales montrer que la probabilité de l'événement F est égale à $\dfrac{7}{12}$.



4 Problème de synthèse

Capacité 4 *Utiliser un arbre pondéré pour résoudre un problème de probabilités*

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,99$;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$.

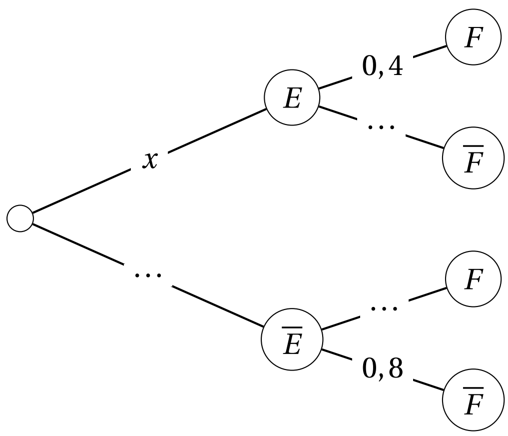
Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.
On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

1. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $M \cap T$.
3. Démontrer que la probabilité $\mathbb{P}(T)$ est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.
4. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

   Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

Capacité 5 *Traduire la formule des probabilités totales par une équation*

Un univers Ω est muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$.
On considère deux événements E et F et on note respectivement $\overline{E}$ et $\overline{F}$ leurs événements contraires.
On sait que $\mathbb{P}(F) = 0,35$ et on donne l'arbre de pondéré de probabilités ci-dessous où $x = \mathbb{P}(E)$.



1. Exprimer $\mathbb{P}(\overline{E})$ en fonction de $x = \mathbb{P}(E)$.
2. Déterminer la probabilité que l'événement F soit réalisé sachant que l'événement $\overline{E}$ est réalisé.
3. Recopier l'arbre pondéré en complétant les probabilités manquantes.
4. Exprimer la probabilité de l'événement F en fonction de x et en déduire la valeur de $x = \mathbb{P}(E)$.