Histoire 1

Thomas Malthus (1766 – 1834) propose un modèle où la population suit une évolution exponentielle (suite géométrique) et la capacité de production plutôt une évolution linéaire (suite arithmétique) ce qui l'amène à préconiser une limitation des naissance parce que la croissance exponentielle est plus rapide que la croissance linéaire.

1 Évolution linéaire

Définition 1

On considère une grandeur y dont la valeur dépend d'une variable x.

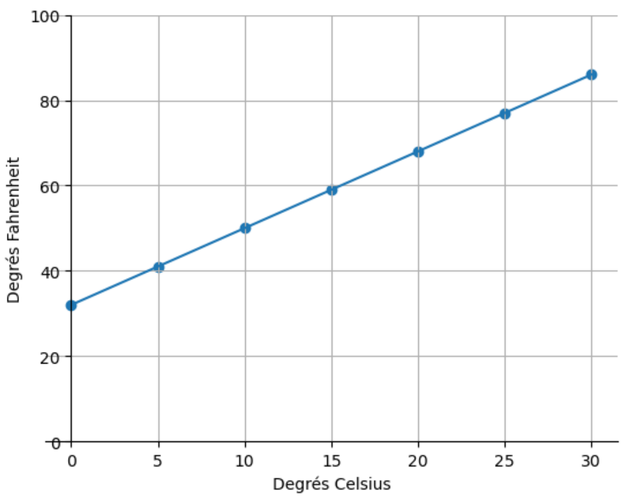
- y suit une **évolution linéaire** par rapport à x si le taux de variation de y par rapport à x est constant, c'est-à-dire si $\dfrac{y(b)-y(a)}{b-a}$ est constant pour tous a et b distincts où y est défini
- Soit y une grandeur qui suit une évolution linéaire par rapport à une variable x :
  - si x prend uniquement des valeurs entières, on dit que y suit une **évolution linéaire discrète** ;
  - si x prend ses valeurs dans un intervalle, on dit que y suit une **évolution linéaire continue**.

Capacité 1 ***Reconnaître une évolution linéaire et savoir la modéliser***

Les degrés Celsius et Fahrenheit sont deux unités de mesure de la température. On a représenté ci-dessous la correspondance entre une mesure en degré Celsius et sa conversion en degrés Fahrenheit correspondante pour une mesure comprise entre 0 et 30 degrés Celsius. Les points sont alignés.

Quelques conversions :

Degrés Celsius	Degrés Fahrenheit
0	32
5	41
10	50
15	59



1. De combien augmente la mesure en degrés Fahrenheit si la mesure en degrés Celsius augmente de 5 degrés ? de 10 degrés ? de 15 degrés ? de 1 degré ?
2. L'évolution de la mesure en Fahrenheit par rapport à la mesure en Celsius vous semble-t-elle linéaire ? Si oui s'agit-il d'une évolution linéaire discrète ou continue ?

3. Soit x une mesure en Celsius, déterminer une expression de la mesure $f(x)$ en Fahrenheit.

Capacité 2 ***Reconnaître une évolution linéaire et savoir la modéliser***

Un vendeur de logiciel propose un contrat d'assistance de deux ans maximum, comprenant l'installation à domicile et un conseiller joignable par téléphone pour 20 € le premier mois, puis 0,6 € de moins par rapport au mois précédent, et ainsi de suite. On note $v(n)$ la mensualité en euros au $n^{ième}$ mois.

1. Calculer $v(1)$ et $v(2)$.
2. Pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant 24$, exprimer $v(n+1)$ en fonction de $v(n)$.
3. Représenter graphiquement avec le mode Suite de la calculatrice les points de coordonnées $(n\,;\, v(n))$ avec n entier tel que $1 \leqslant n \leqslant 24$. Quelle est la forme du nuage de points ?
4. Calculer le montant de la mensualité au $12^{ième}$ mois et donner sans justifier une formule explicite de $v(n)$ pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant 24$.
5. L'évolution du montant de la mensualité par rapport au nombre de mois vous semble-t-elle linéaire ? Si oui s'agit-il d'une évolution linéaire discrète ou continue ?.

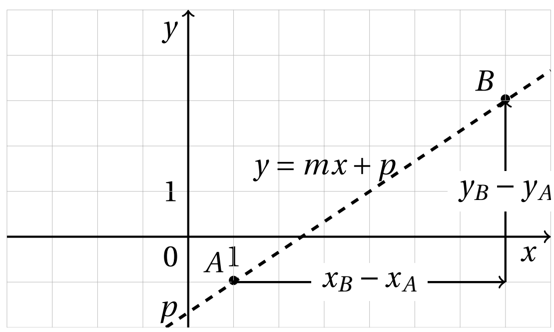
2 Évolution linéaire continue, fonctions affines

Théorème 1

Si une quantité y suit une **évolution linéaire continue** par rapport à une variable x, alors y est une fonction affine de x et on a :

$$y = f(x) = mx + p \text{ avec } \begin{cases} m \text{ coefficient directeur} \\ p \text{ ordonnée à l'origine} \end{cases}$$

Dans un repère l'ensemble des points de coordonnées $\left(x\,;\, y = f(x)\right)$ est la droite d'équation $y = mx + p$.



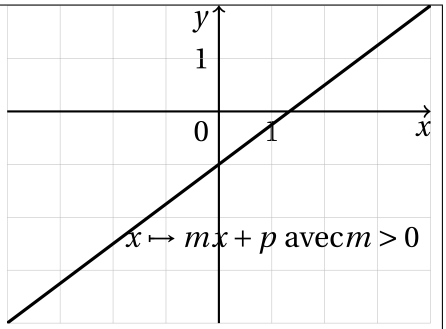
Théorème 2

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

<ins>Premier cas</ins> : $m > 0$

- ☞ f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- ☞ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{p}{m}$ et f est négative puis positive

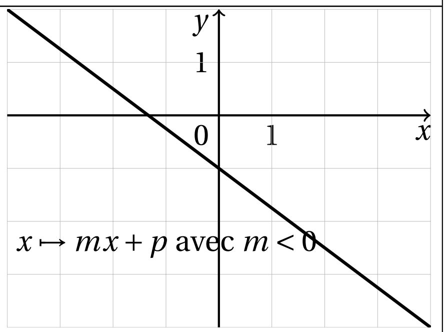
x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	



<ins>Deuxième cas</ins> : $m < 0$

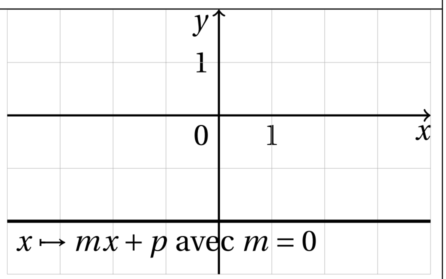
- ☞ f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- ☞ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{p}{m}$ et f est positive puis négative

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	



<ins>Troisième cas</ins> : $m = 0$

- ☞ f est **constante** sur $\mathbb{R}$, $f : x \longmapsto p$.
- ☞ f est de signe constant, celui de p



Capacité 3 ***Déterminer le sens de variation d'une fonction affine, résoudre une équation ou une inéquation***

1. Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 40 - 3x$.
   a. Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$ et en déduire le tableau de signe de f.
2. Soit g une fonction affine telle que $g(0) = 12$ et $g\left(\dfrac{13}{4}\right) = 24$.
   a. g est-elle croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$?
   b. Calculer son coefficient directeur m et en déduire l'expression de $g(x)$.
   c. Résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant 100$.

3 Évolution linéaire discrète, suites arithmétiques

3.1 Définition

Définition 2

Une suite u est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que : $\boxed{\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ u(n+1) = u(n) + r}$.
Le réel r est la **raison** de la suite.

Capacité 4 *Caractériser une suite arithmétique*

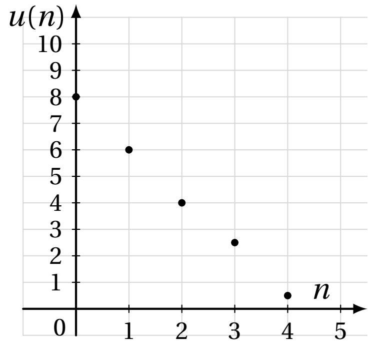
Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :**

  La suite u dont on a représenté ci-contre les termes $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$ est arithmétique.

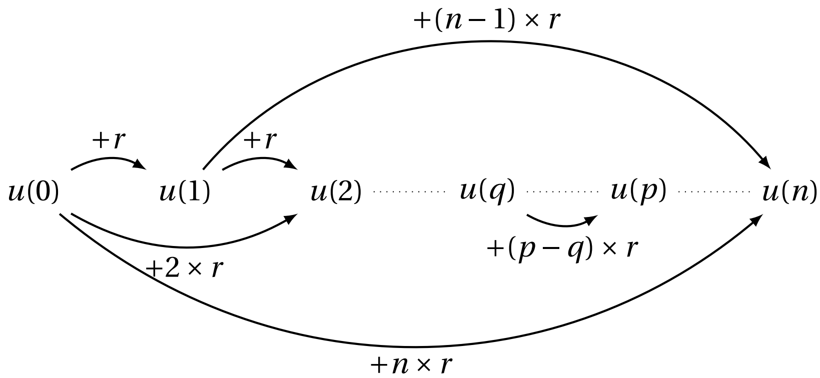
- **Affirmation 2 :**

  Si v est une suite arithmétique de raison 3 et telle que $v(1) = -5$ alors $v(6) = 10$.



3.2 Calculs de termes et représentation graphique

Propriété 1



Soit u une suite arithmétique de raison r.

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u(n) = u(0) + \cdots\cdots \times r$ et $u(n) = u(1) + \cdots\cdots \times r$
- Pour tous entiers $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, $u(p) = u(q) + \cdots\cdots \times r$.

Une suite arithmétique est entièrement déterminée par la connaissance d'un terme et de sa raison.

Capacité 5 *Calculer le terme général d'une suite arithmétique, voir exos 1 et 2 p. 13*

1. Soit u une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u(1) = 10$.

a. Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.

b. On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite u.
Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer $u(2)$; cette formule « tirée vers le bas » dans la colonne devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite u.

	A	B
1	n	$u(n)$
2	1	10
3	2	

c. Exprimer $u(n)$ en fonction de n et calculer $u(43)$.

2. Soit (w_n) une suite arithmétique telle que $w(13) = -5$ et $w(17) = 23$.

a. Soit r la raison de cette suite, exprimer $w(17) - w(13)$ en fonction de r. En déduire la valeur de r puis calculer $w(1)$.

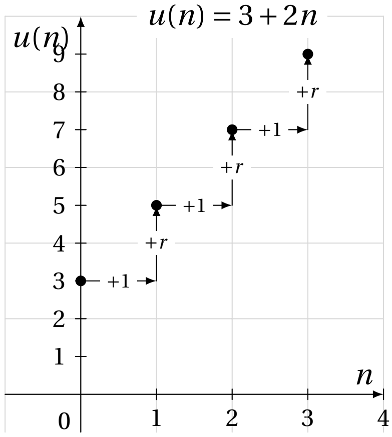
b. Exprimer $w(n)$ en fonction de n et calculer $w(50)$.

Propriété 2

Une suite u est arithmétique de raison r si et seulement s'il existe deux réels a et r tels que :

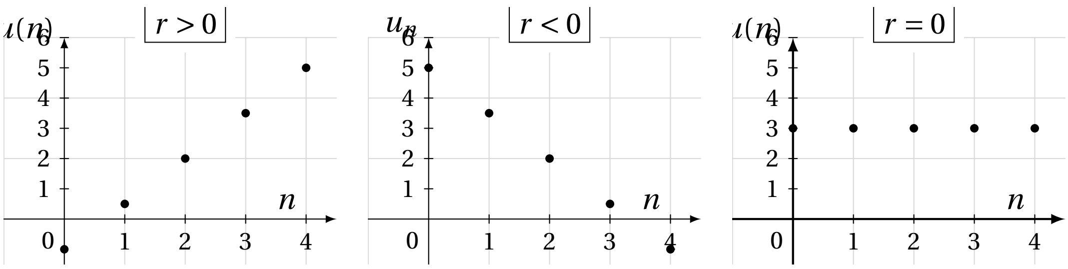
$$\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}, \quad u(n) = a + nr$$

Une suite est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique dans un repère est constituée de points alignés.
Une suite arithmétique u modélise une **évolution linéaire discrète** d'une quantité $u(n)$ par rapport à une variable entière n.



3.3 Sens de variation et problème de seuil

Propriété 3 *Sens de variation*



Soit u une suite arithmétique de raison r.

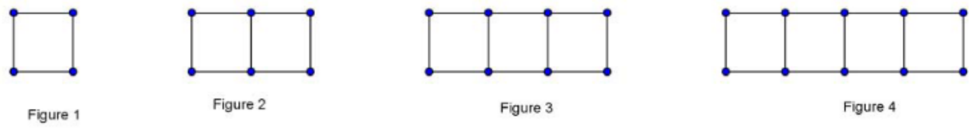
- u est strictement croissante si $r > 0$.
- u est strictement décroissante si $r < 0$.
- u est constante si $r = 0$.

Capacité 6 *Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique*

Soit u une suite arithmétique telle que pour tout entier naturel n, on a : $u(n) = 1 - \dfrac{5-2n}{3}$. Déterminer la raison de u et son sens de variation.

Capacité 7 *Modéliser par une une suite arithmétique et résoudre un problème de seuil*

On considère une suite logique de figures constituées d'allumettes. On donne les quatre premières figures ci-dessous. Chaque nouvelle figure contient un carré de plus que la précédente.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $u(n)$ le nombre d'allumettes utilisées pour construire la figure n.
Ainsi on a $u(1) = 4$, $u(2) = 7$, $u(3) = 10$ et $u(4) = 13$.



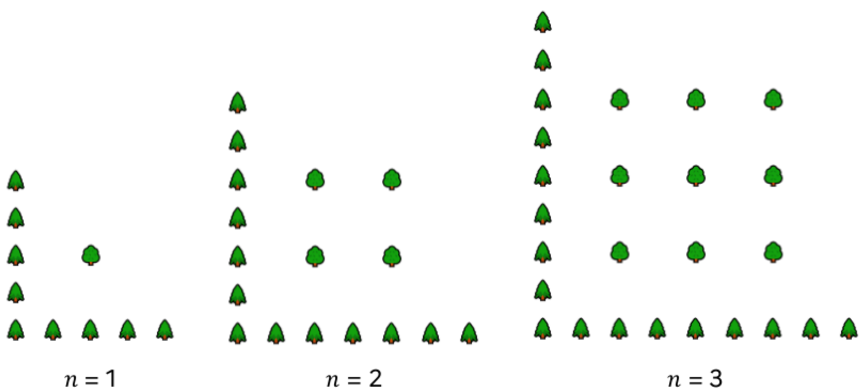
1. Justifier que la suite u est arithmétique et préciser sa raison.
2. **a.** Combien d'allumettes seront nécessaires pour construire la figure 10 ?

   b. Soit n un entier supérieur ou égale à 1, combien d'allumettes seront nécessaires pour construire la figure n ?

   c. À partir de quelle valeur de l'entier $n \geqslant 1$ faudra-t-il plus de 1000 allumettes pour construire la figure n ?

Capacité 8 *Modéliser par une une suite arithmétique et résoudre un problème de seuil*

Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre les vents dominants, il plante des conifères sur deux côtés du verger.
On a représenté cette situation ci-dessous, avec la disposition des pommiers et des conifères pour un nombre n de rangées de pommiers compris entre 1 et 3.



1. Combien de conifères seront utiles pour protéger 25 rangées de pommiers ?
2. Combien de rangées de pommiers peut-on protéger avec 500 conifères ?