Histoire 1

Thomas Malthus (1766 – 1834) propose un modèle où la population suit une évolution exponentielle (suite géométrique) et la capacité de production plutôt une évolution linéaire (suite arithmétique) ce qui l'amène à préconiser une limitation des naissance parce que la croissance exponentielle est plus rapide que la croissance linéaire.

1 Évolution exponentielle

Activité 1

Marc a créé un site internet au premier Janvier 2 024. Fin Janvier 2 024 son site a deux visites : une visite de sa part et une autre visite.

Depuis son ouverture, le nombre de visites mensuelles du site de Marc évolue selon le modèle suivant : par rapport au mois précédent, Marc réalise chaque mois deux visites supplémentaires de son site et le nombre total de visites (les siennes et celles des autres) double.

Au cours du $n^{\text{ième}}$ mois après Décembre 2 023 avec n entier supérieur ou égal à 1, ont été réalisées :

- $u(n)$ visites par Marc;
- $v(n)$ visites au total (celles de Marc plus celles des autres).

Par exemple, 1 mois après Décembre 2 023, en Janvier 2 024, on a décompté :

- $u(1) = 1$ visite de Marc;
- $v(1) = 2$ visites au total.

On donne ci-dessous la copie d'une feuille de tableur avec les premières valeurs de $u(n)$ et $v(n)$:

Tableur

	A	B	C
1	n	$u(n)$	$v(n)$
2	1	1	2
3	2	3	4
4	3	5	8
5	4	7	16

1. On initialise les cellules `B2` et `C2` avec les valeurs $u(1) = 1$ et $v(1) = 2$.

   Quelles formules peut-on écrire en `B3` et `C3` pour compléter la feuille de calcul en les propageant vers le bas?

2. Quel était le nombre de visites autres que celles de Marc en Mars 2 024?

3. **a.** Représenter dans le même repère orthonormal, les points de coordonnées $(n\,;\,u(n))$ et $(n\,;\,v(n))$ avec $1 \leqslant n \leqslant 4$

   b. Pour chaque suite déterminer si elle peut correspondre à un modèle d'évolution linéaire.

4. **a.** Quelle est la nature de la suite u?

b. Monter que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $u(n) = 2n - 1$.

5. **a.** Soit n un entier supérieur ou égal à 1, donner une relation récurrence entre $v(n+1)$ et $v(n)$ qui traduit le modèle d'évolution de la suite v.

b. Calculer le taux d'évolution entre $v(1)$ et $v(2)$, entre $v(2)$ et $v(3)$, entre $v(3)$ et $v(4)$.

c. Plus généralement que peut-on dire du taux d'évolution entre $v(n)$ et $v(n+1)$ pour n un entier supérieur ou égal à 1 ?

d. Conjecturer une formule qui permet d'exprimer explicitement $v(n)$ en fonction de n pour n un entier supérieur ou égal à 1.

6. Au bout de combien de mois le nombre de visites de Marc va-t-il dépasser 100 ? Même question pour le nombre total de visites. Comparer les vitesses de croissance des suites u et v.

Définition 1

On considère une grandeur y dont la valeur dépend d'une variable x.

☞ y suit une **évolution exponentielle** par rapport à x si le taux d'évolution de y est constant, c'est-à-dire si $\dfrac{y(x_{finale}) - y(x_{initiale})}{y(x_{initiale})}$ est constant pour toutes valeurs x_{finale} et $x_{initiale}$ où y est défini avec $x_{finale} \neq x_{initiale}$ et $y(x_{initiale}) \neq 0$.

☞ Soit y une grandeur qui suit une évolution exponentielle par rapport à une variable x :

- si x prend uniquement des valeurs entières, on dit que y suit une **évolution exponentielle discrète** ;
- si x prend ses valeurs dans un intervalle, on dit que y suit une **évolution exponentielle continue**.

2 Évolution linéaire discrète

2.1 Suite géométrique

Définition 2

Une suite u est **géométrique** s'il existe un réel q tel que :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}, \quad u(n+1) = q \times u(n)}$$

$$u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$$

Le réel q est la **raison** de la suite.

Capacité 1 ***Caractériser une suite géométrique***

1. Une suite u telle que $u(0) = 3$, $u(1) = 6$ et $u(2) = 10$ peut-elle être géométrique ?

2. On note $v(n)$ la valeur d'une action , n mois après son introduction en bourse. Chaque mois, la valeur de l'action diminue de 2%. La suite v est-elle géométrique ?

3. On note $p(n)$ la population d'une ville n années après 2020. Chaque année la population augmente de $2,5\%$. La suite p est-elle géométrique ?

Propriété 1

1. Une suite u géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme non nul, ne s'annule jamais.

2. Si une suite géométrique u ne s'annule jamais alors le taux d'évolution entre deux valeurs successives $u(n)$ et $u(n+1)$ est constant. La suite géométrique u modélise alors une **évolution exponentielle discrète**. On a la relation :

$$\boxed{\text{Taux d'évolution entre } u(n) \text{ et } u(n+1) = \text{Raison} - 1}$$

Capacité 2 ***Utiliser la relation entre raison d'une suite géométrique et taux d'évolution***

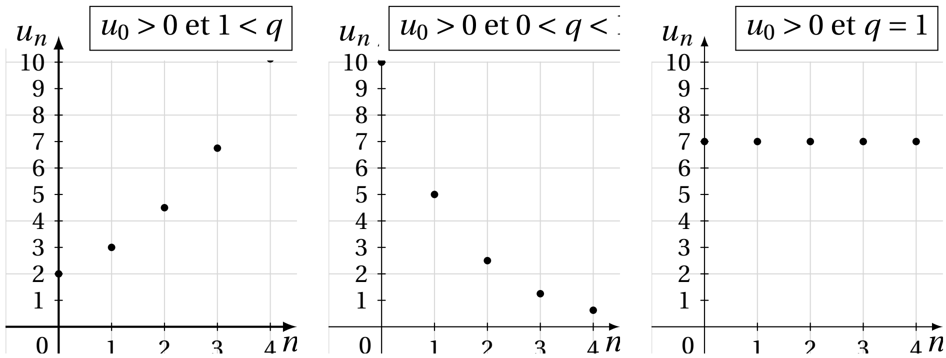
Compléter le tableau :

Raison de la suite géométrique u	Taux d'évolution entre $u(n)$ et $u(n+1)$	Taux en %
$0,9$	$\dots$	$\dots$
2	$\dots$	$\dots$
$1,4$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$-0,25$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	-30 %
$\dots$	$0,15$	$\dots$
$\dots$	15	$\dots$

2.2 Propriétés d'une suite géométrique

Propriété 2 ***Représentation graphique d'une suite géométrique***

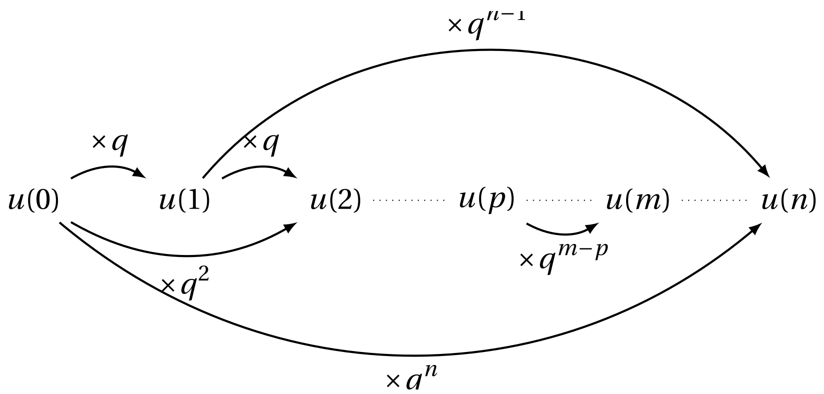
Dans un repère du plan, la représentation graphique d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q n'est pas constituée de points alignés sauf dans le cas où $q = 1$.



Propriété 3 ***Calculs de termes***

Soit u une suite géométrique de raison q.

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u(n) = u(0) \times q^n$ et $u(n) = u(1) \times q^{n-1}$
- Pour tous entiers $p \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, $u(m) = u(p) \times q^{m-p}$.



Capacité 3 ***Calculer les termes d'une suite géométrique***

1. Soit u une suite géométrique de raison 3 et telle que $u(0) = 5$. Exprimer $u(n)$ en fonction de n pour tout entier naturel n.
2. Soit v une suite géométrique de raison 3 et telle que $v(1) = 5$. Exprimer $v(n)$ en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. Soit w une suite géométrique de raison 3 et telle que $w(2) = 5$. Exprimer $w(n)$ en fonction de n pour tout entier naturel n.
4. Soit r une suite géométrique telle que $r(5) = 5$ et $r(6) = 2$. Calculer $r(10)$.

2.3 Modélisation par une suite géométrique

Capacité 4 ***Modéliser un phénomène discret à croissance exponentielle, calculer le terme général d'une suite géométrique***

La scintigraphie cardiaque est une technique d'imagerie qui permet d'examiner la qualité de l'irrigation du cœur par les artères coronaires.
Lors de cet examen, on injecte au patient un échantillon d'un isotope de Thallium d'activité radioactive 60 MBq (Méga Becquerel).
On appelle demi-vie le temps mis par une substance radioactive pour perdre la moitié de son activité.
Ainsi, après une demi-vie, l'activité radioactive de cet échantillon de Thallium est de 30 MBq et après deux demi-vies, l'activité radioactive de cet échantillon est de 15 MBq.
On note $u(0)$ l'activité radioactive de cet échantillon (en MBq) à l'injection et $u(n)$ l'activité radioactive de cet échantillon (en MBq) après n demi-vies avec n entier naturel.

1. Donner les valeurs de $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$..
2. Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$. En déduire la nature de la suite u.
3. **a.** Exprimer $u(n)$ en fonction de n.
   b. Déterminer l'activité radioactive de cet échantillon après 5 demi-vies.
4. Compléter le programme `Python` ci-dessous pour que `seuil()` renvoie le plus petit entier n à partir duquel $u(n) < 0,25$.

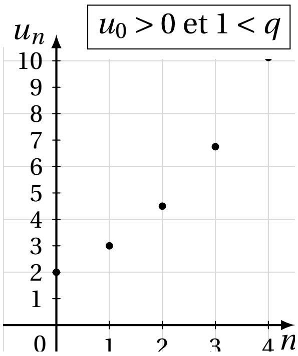
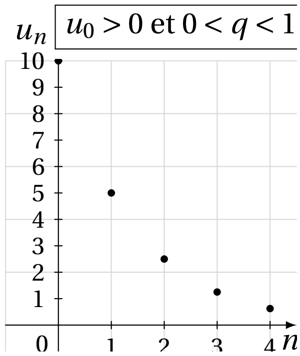
```python
def seuil():
    u = 60
    n = 0
    while ...     :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

5. Sachant que la demi-vie de cet isotope de Thallium est d'environ 3 jours, déterminer le nombre de jours au bout desquels on est certain que l'activité radioactive de cet échantillon est strictement inférieure à 0,25 MBq.

2.4 Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété 4 ***Suites géométriques***

Soit u une suite géométrique de raison q positive et de premier terme $u(0)$ strictement positif. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u(n) = u_0 \times q^n$.
Le sens de variation de la suite u dépend de la valeur de la raison :

u est croissante si $\boxed{1 < q}$	u est décroissante si $\boxed{0 < q < 1}$
	

Capacité 5 ***Étudier le sens de variation d'une suite géométrique***

Dans chaque cas, la suite p modélise l'évolution de la population d'une ville entre l'année 2024 et l'année $2024 + n$ pour $p(n)$.
Déterminer dans chaque cas le sens de variation de la suit p.

1. $p(0) = 20000$ et la population évolue avec un taux constant de $+5\%$ par an.
2. $p(0) = 500000$ et la suite p est géométrique de raison $0,985$.
3. $p(0) = 50000$ et la population évolue avec un taux constant de $-0,75\%$ par an.
4. $p(0) = 200000$ et $p(1) = 195000$ et la suite p est géométrique.