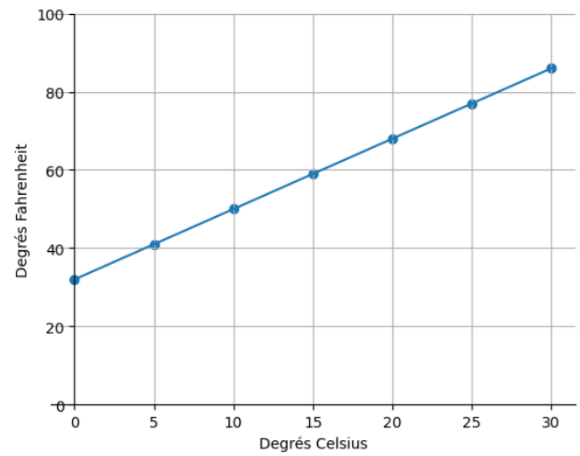
Evolution linéaire
Correction des exemples du cours

Capacité 1 ***Reconnaître une évolution linéaire et savoir la modéliser***

Les degrés Celsius et Fahrenheit sont deux unités de mesure de la température. On a représenté ci-dessous la correspondance entre une mesure en degré Celsius et sa conversion en degrés Fahrenheit correspondante pour une mesure comprise entre 0 et 30 degrés Celsius. Les points sont alignés.

Quelques conversions :

Degrés Celsius	Degrés Fahrenheit
0	32
5	41
10	50
15	59



1. De combien augmente la mesure en degrés Fahrenheit si la mesure en degrés Celsius augmente de 5 degrés ? de 10 degrés ? de 15 degrés ? de 1 degré ?

Augmentation en degrés Celsius	Augmentation en degrés Fahrenheit
5	9
10	18
15	27
1	$\frac{9}{5} = 1,8$

2. L'évolution de la mesure en Fahrenheit par rapport à la mesure en Celsius vous semble-t-elle linéaire ? Si oui s'agit-il d'une évolution linéaire discrète ou continue ?

On peut observer que les variations des mesures en Fahrenheit sont proportionnelles aux variations des mesures en Celsius, ce que confirme l'alignement des points de coordonnées (mesure en Celsius ; mesure en Fahrenheit).

la fonction f de conversion de mesure x en degrés Celsius vers une mesure $f(x)$ en degrés Fahrenheit est définie sur un intervalle, donc elle suit une évolution linéaire continue.

3. Soit x une mesure en Celsius, déterminer une expression de la mesure $f(x)$ en Fahrenheit.

Si l'évolution est linéaire alors.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(10)-f(5)}{10-5} = \frac{18-9}{5} = \frac{9}{5}$$

donc $$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{9}{5}$$

donc $$\boxed{f(x) = \frac{9}{5}x + f(0) = \frac{9}{5}x + 32}$$

Capacité 2 *Reconnaître une évolution linéaire et savoir la modéliser*

Un vendeur de logiciel propose un contrat d'assistance de deux ans maximum, comprenant l'installation à domicile et un conseiller joignable par téléphone pour 20 € le premier mois, puis 0,6 € de moins par rapport au mois précédent, et ainsi de suite. On note $v(n)$ la mensualité en euros au $n^{\text{ième}}$ mois.

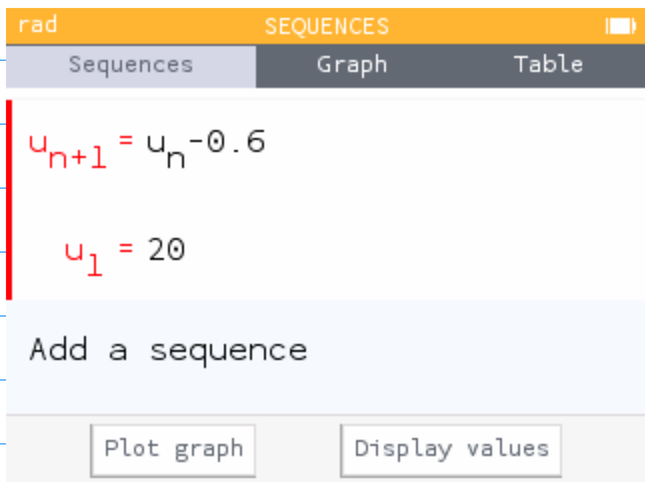
1. Calculer $v(1)$ et $v(2)$.
2. Pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant 24$, exprimer $v(n+1)$ en fonction de $v(n)$.
3. Représenter graphiquement avec le mode Suite de la calculatrice les points de coordonnées $(n\,;\,v(n))$ avec n entier tel que $1 \leqslant n \leqslant 24$. Quelle est la forme du nuage de points ?
4. Calculer le montant de la mensualité au $12^{\text{ième}}$ mois et donner sans justifier une formule explicite de $v(n)$ pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant 24$.
5. L'évolution du montant de la mensualité par rapport au nombre de mois vous semble-t-elle linéaire ? Si oui s'agit-il d'une évolution linéaire discrète ou continue ?.

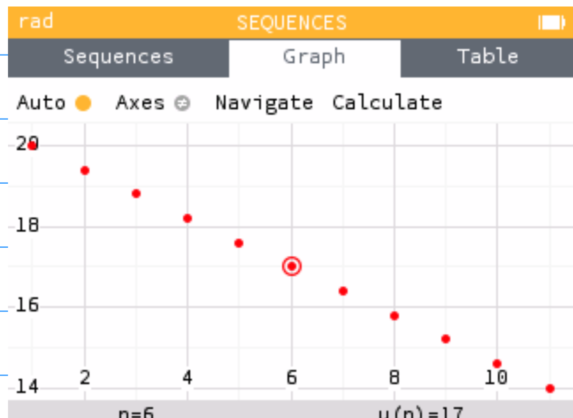
1) $v(1) = 20$ et $v(2) = 20 - 0{,}6 = 19{,}4$

2) Pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq 24$:

$v(n+1) - v(n) = -0{,}6$

3)





Les points du nuage de coordonnées $(n\,;\,u(n))$ sont alignés.

4)

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
v(1)=20 \arrow[r, "-0{,}6"] \arrow[rr, bend right, "+2\times(-0{,}6)"'] \arrow[rrr, bend right=50, "+11\times(-0{,}6)"'] & v(2)=19{,}4 \arrow[r, "-0{,}6"] & v(3) \arrow[r, "-0{,}6", "\cdots"'] & v(12
\end{tikzcd}$$

$$v(12) = v(1) + 11\times(-0{,}6)$$
$$v(12) = 20 - 6{,}6 = 13{,}4$$

5) On peut observer une proportionnalité entre les variations de n et les variations de $v(n)$

Variations de n	Variations de $v(n)$
1 de $n=1$ à $n=2$	$v(2)-v(1) = -0{,}6$
2 de $n=1$ à $n=3$	$v(3)-v(1) = -1{,}2$ $v(3)-v_1) = 2\times(-0{,}6)$
11 de $n=1$ à $n=12$	$v(12)-v(1) = -6{,}6 = 11\times(-0{,}6)$

On peut donc conjecturer que l'évolution du tarif v est linéaire, ce que confirme l'alignement des points de coordonnées $(n\,;v_n)$

Capacité 3 ***Déterminer le sens de variation d'une fonction affine, résoudre une équation ou une inéquation***

1. Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 40 - 3x$.

   a. Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

   b. Résoudre l'in l'équation $f(x) < 0$ et en déduire le tableau de signe de f.

2. Soit g une fonction affine telle que $g(0) = 12$ et $g\left(\frac{13}{4}\right) = 24$.

   a. g est-elle croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$?

   b. Calculer son coefficient directeur m et en déduire l'expression de $g(x)$.

   c. Résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant 100$.

1) a) f fonction affine d'expression $f(x) = 40 - 3x$)
Son coefficient directeur est $m = -3$ qui est strictement négatif, on en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}$

b) $f(x) < 0$ équivaut à $40 - 3x < 0$
équivaut à $\frac{40}{3} < x$

L'ensemble des solutions de l'inéquation
$40 - 3x < 0$ est l'intervalle $\left]\frac{40}{3} ; +\infty\right[$
On en déduit le tableau de signes de f :

x	$-\infty$		$\frac{40}{3}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

positif puis nul puis négatif
car f décroissante sur $\mathbb{R}$

2) a) Une fonction affine g est soit croissante, soit décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a $g(0) = 12$ et $g\left(\frac{13}{4}\right) = 24$

donc $g(0) < g\left(\frac{13}{4}\right)$

donc g croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Le coefficient directeur m de g est :

$$m = \frac{g\left(\frac{13}{4}\right) - g(0)}{24 - 12} = \frac{13}{4 \times 12} = \frac{13}{48}$$

Comme $g(x) = mx + p$

on a $g(x) = \frac{13}{48}x + p$

De plus $p = g(0)$ donc $p = 12$

On a donc $\boxed{g(x) = \frac{13}{48}x + 12}$

c) $g(x) \geqslant 100$ équivaut à $\frac{13}{48}x + 12 \geqslant 100$

équivaut à $\frac{13}{48}x \geqslant 88$

équivaut à $x \geqslant \frac{88 \times 48}{13}$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) \geqslant 100$ est l'intervalle $\left[\frac{88 \times 48}{13} ; +\infty\right[$

Capacité 4 *Caractériser une suite arithmétique*

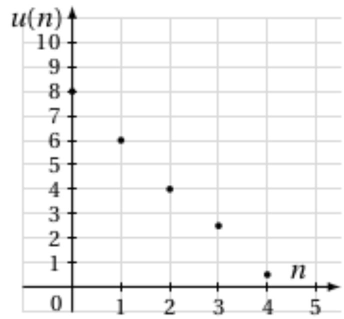
Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :**

  La suite u dont on a représenté ci-contre les termes $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$ est arithmétique.

- **Affirmation 2 :**

  Si v est une suite arithmétique de raison 3 et telle que $v(1) = -5$ alors $v(6) = 10$.



• L'affirmation 1 est fausse car la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante. En effet, on a :

$u(0) = 8$ et $u(1) = 6$ et $u(2) = 4$ et $u(3) = 2{,}5$

donc $u(1) - u(0) = -2$ mais $u(3) - u(2) = -1{,}5$

• L'affirmation 2 est vraie car si v est arithmétique de raison 3 alors :

$$v(1) \xrightarrow{+(6-1)\times r} v(6)$$

donc $v(6) = v(1) + (6-1)\times r$

$v(6) = -5 + 5\times 3 = 10$

Capacité 5 ***Calculer le terme général d'une suite arithmétique, voir exos 1 et 2 p. 13***

1. Soit u une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u(1) = 10$.

   a. Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.

   b. On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite u.
   Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer $u(2)$; cette formule « tirée vers le bas » dans la colonne devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite u.

	A	B
1	n	$u(n)$
2	1	10
3	2	

   c. Exprimer $u(n)$ en fonction de n et calculer $u(43)$.

2. Soit (w_n) une suite arithmétique telle que $w(13) = -5$ et $w(17) = 23$.

   a. Soit r la raison de cette suite, exprimer $w(17) - w(13)$ en fonction de r. En déduire la valeur de r puis calculer $w(1)$.

   b. Exprimer $w(n)$ en fonction de n et calculer $w(50)$.

1) a) Pour tout entier $n \geq 1$:

$$u(n+1) = u(n) + r$$

$$\boxed{u(n+1) = u(n) - 3}$$

b) On écrit en B3 la formule $\boxed{=B2-3}$

c) Pour tout entier $n \geq 1$:

$$u(n) = u(1) + (n-1) \times r$$

$$u(n) = 10 + (n-1) \times (-3)$$

$$u(n) = 10 - 3(n-1) = 13 - 3n$$

En particulier, on a :

$$u(43) = 13 - 3 \times 43 = 13 - 129 =$$
$$u(43) = -116$$

$$\overset{+(17-13)\times r}{u(13) \longrightarrow u(17)}$$

2) a)

On a $u(17) = u(13) + (17-13) \times r$

$23 = -5 + 4r$

$28 = 4r$

$\frac{28}{4} = r$

$\boxed{7 = r}$

La raison de cette suite est donc $r = 7$

On a $u(1) = u(13) + (1-13) \times r$

$\boxed{u(1) = -5 - 12 \times 7 = -89}$

b) Pour tout entier naturel n :

$u(n) = u(1) + (n-1) \times r$

$u(n) = -89 + (n-1) \times 7$

$\boxed{u(n) = -96 + 7n}$

On en déduit que $u(50) = -96 + 7 \times 50$

$u(50) = 350 - 96$

$\boxed{u(50) = 254}$

Capacité 6 ***Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique***

Soit u une suite arithmétique telle que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 1 - \dfrac{5-2n}{3}$. Déterminer la raison de u et son sens de variation.

Pour tout entier naturel n :

$$u(n) = 1 - \frac{5-2n}{3} = 1 - \frac{5}{3} + \frac{2}{3}n$$

$$u(n) = \underbrace{-\frac{2}{3}}_{u(0)} + \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{raison}}n$$

La raison de la suite u est $\frac{2}{3}$.

La raison est strictement positive donc la suite u est croissante.

Capacité 7 *Modéliser par une une suite arithmétique et résoudre un problème de seuil*

On considère une suite logique de figures constituées d'allumettes. On donne les quatre premières figures ci-dessous. Chaque nouvelle figure contient un carré de plus que la précédente.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $u(n)$ le nombre d'allumettes utilisées pour construire la figure n.
Ainsi on a $u(1) = 4$, $u(2) = 7$, $u(3) = 10$ et $u(4) = 13$.

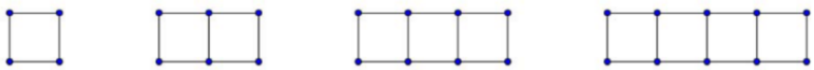


Figure 1 Figure 2 Figure 3 Figure 4

1. Justifier que la suite u est arithmétique et préciser sa raison.
2. a. Combien d'allumettes seront nécessaires pour construire la figure 10 ?
   b. Soit n un entier supérieur ou égale à 1, combien d'allumettes seront nécessaires pour construire la figure n ?
   c. À partir de quelle valeur de l'entier $n \geqslant 1$ faudra-t-il plus de 1000 allumettes pour construire la figure n ?

1) A chaque étape on rajoute 3 allumettes pour un nouveau carré (le quatrième côté est le bord droit du motif précédent).
On a donc pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u(n+1) = u(n) + 3$$

La suite u est donc arithmétique de raison 3.

2) a) On a $u(1) = 4$

et u est arithmétique de raison 3

donc

$$u(1) \xrightarrow{+(10-1)\times r} u(10)$$

$$u(10) = u(1) + (10-1) \times 3$$

$$u(10) = 4 + 9 \times 3 = 4 + 27 = 31$$

b) Pour tout entier $n \geq 1$:

$$u(n) = u(1) + (n-1) \times 3$$

$$u(n) = 4 + (n-1) \times 3$$

$$\boxed{u(n) = 4 + 3n - 3 = 3n + 1}$$

c) Pour déterminer à partir de quelle valeur de n on aura besoin de plus de 1000 allumettes pour construire la figure n on doit résoudre l'inéquation :

$$1000 < u(n)$$

$$1000 < 3n + 1$$

$$-1 \;\; \Leftrightarrow 999 < 3n \;\; -1$$

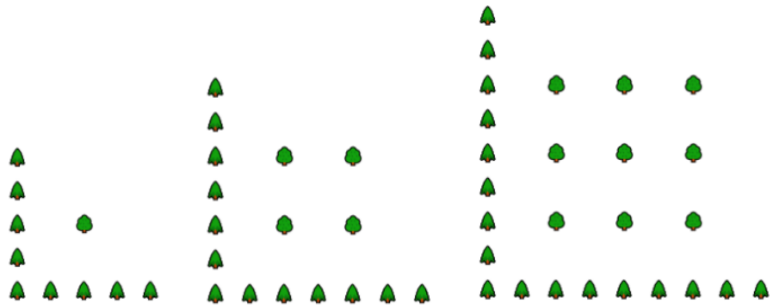
$$\div 3 \;\; \Leftrightarrow \frac{999}{3} < n \;\; \div 3$$

$$333 < n$$

A partir du rang $n = 334$ on aura besoin de plus de 1000 allumettes pour construire la figure

Capacité 8 ***Modéliser par une une suite arithmétique et résoudre un problème de seuil***

Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre les vents dominants, il plante des conifères sur deux côtés du verger.
On a représenté cette situation ci-dessous, avec la disposition des pommiers et des conifères pour un nombre n de rangées de pommiers compris entre 1 et 3.



1. Combien de conifères seront utiles pour protéger 25 rangées de pommiers ?

2. Combien de rangées de pommiers peut-on protéger avec 500 conifères ?

1) Analysons la figure

nombre de rangées de pommiers	nombre de conifères
$n=1$	9
$n=2$	13 $+4$
$n=3$	17 $+4$

Pour chaque nouvelle rangée de pommiers, on rajoute 4 conifères donc si pour n rangées de pommiers on a besoin de $c(n)$ conifères alors on a la relation de récurrence :

$$C(n+1) = C(n) + 4$$

La suite C est donc arithmétique de raison 4.

$c(1) = 9$

donc $c(25) = c(1) + (25-1) \times r$

$c(25) = c(1) + 24 \times 4$

$c(25) = 9 + 24 \times 4$

$$\boxed{c(25) = 9 + 96 = 105}$$

2) Pour déterminer le nombre de rangées qu'on peut protéger avec 500 conifères, on résout l'inéquation :

$500 \geq c(n)$

$500 \geq c(1) + (n-1) \times 4$

$500 \geq 9 + (n-1) \times 4$ $\quad -9$

$500 - 9 \geq 4n - 4$ $\quad +4$

$495 \geq 4n$ $\quad \div 4$

$\frac{495}{4} \geq n$

$$\boxed{123 \geq n}$$

On peut protéger jusqu'à 123 rangées de pommiers avec 500 conifères.