Correction de la capacité 3

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

2 octobre 2023

donne ci-dessous un programme Python :

```python
from math import sqrt

def f(x):
    return sqrt(2 * x + 3)

def taux_variation(f, a, n):
    pas = 1 / n
    x = a - 5 * pas
    for i in range(10):
        if i != 5:
            print(x, (f(x) - f(a))/ (x - a))
        x  = x + pas
```

Question 1

La fonction dont on va calculer des taux de variation avec ce programme a pour expression $f(x) = \sqrt{2x+3}$.
$f(x)$ est définie si et seulement si $2x + 3 \geqslant 0$.

Question 2

```
>>> taux_variation(f, 3, 1000)
2.995 0.333425977401987
2.996 0.3334074403474882
2.997 0.3333889074150649
2.9979999999999998 0.33337037860322205
2.9989999999999997 0.3333518539098132
3.0009999999999994 0.3333148168722282
3.0019999999999993 0.3332963045244993
3.0029999999999992 0.33327779628864185
3.003999999999999 0.33325929216284234
```

Question 2

`taux_variation(f, 3 , 1000)` affiche les taux de variation $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour a de valeur fixe égale à 3 et x variant de $a-5\times\text{pas}=2,995$ à $a+4\times\text{pas}=3,004$ (10 tours de boucle) avec pas fixé à $\frac{1}{n}=\frac{1}{1000}$.
Premier tour : $i=0$ et $x=2,995$; Second tour : $i=1$ et $x=2,996$; Troisième tour : $i=2$ et $x=2,997$; ; Cinquième tour : $i=5$ et $x=3$; ...Dixième tour : $i=9$ et $x=3,004$.
Les valeurs affichées sont légèrement différentes à cause de la représentation approchée des décimaux dans la machine.

Question 3

Le test `i != 5` permet de ne pas calculer le taux de variation $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ au 5 ème tour de boucle lorsque $x = a$. Sinon on aurait une division par 0.

Question 4

```
>>> taux_variation(f, 3, 100000)
2.99995 0.3333342592622965
2.99996 0.3333340740778361
2.9999700000000002 0.33333388889386917
2.9999800000000003 0.3333337036889314
2.9999900000000004 0.3333335185333368
3.0000100000000005 0.33333314813332987
3.0000200000000006 0.3333329629777353
3.0000300000000006 0.3333327777727975
3.0000400000000007 0.3333325925888306
```

Question 4

`taux_variation(f, 3 , 10000)` affiche les taux de variation $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour a de valeur fixe égale à 3 et x variant de $a-5\times\text{pas}=2{,}9995$ à $a+4\times\text{pas}=3{,}0004$ (10 tours de boucle) avec pas fixé à $\frac{1}{n}=\frac{1}{10000}$.
Avec les exécutions de `taux_variation(f, 3 , 1000)` et `taux_variation(f, 3 , 10000)`, on peut conjecturer que le taux de variation $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se rapproche de plus en plus de la valeur $0{,}333\overline{3}\ldots=\frac{1}{3}$ lorsque x se rapproche de $a=3$.
On peut donc conjecturer que la fonction f est dérivable en 3 et que $f'(3)=\frac{1}{3}$.