Corrigé de la fiche d'exercices dérivation

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan.

1. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x+3$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 2.
2. Étudier les positions relatives des droites Δ et de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

1) La droite Δ d'équation $y = -x+3$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ ssi
$$\begin{cases} f'(2) = -1 & \text{coefficient directeur de } \Delta \quad (C_1) \\ f(2) = -2+3 = 1 & (C_2) \end{cases}$$

On a $f(2) = \dfrac{1}{2-1} = \dfrac{1}{1} = 1$ donc la condition (C_2) est vérifiée

Pour vérifier la condition (C_1) il nous faut déterminer que le nombre dérivé de f en 2. existe et que $f'(2) = -1$

On calcule d'abord le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ pour h tel que $h \neq 0$ et $2+h > 1$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h-1} - \frac{1}{2-1}}{h} = \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1+h}{1+h}}{h} = \frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\frac{-h}{1+h}}{h} = \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(1+h)}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-1}{1+h}$$

Ensuite on fait tendre h vers 0.

$$\lim_{h \to 0} \frac{-1}{1+h} = -1$$

donc $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -1$

donc par définition f dérivable en 2 et $f'(2) = -1$

La condition (C1) est donc bien vérifiée. Les conditions (C1) et (C2) étant vérifiées on en déduit que la droite d'équation $y = -x+3$ est tangente à C_f en son point d'abscisse 2.

2) Pour étudier les positions relatives de la courbe C_f et de sa tangente Δ on étudie le signe de la différence de leurs fonctions représentatives.

Pour tout $x > 1$, cette différence est égale à :

$$d(x) = f(x) - (-x+3)$$

$$d(x) = \frac{1}{x-1} - (-x+3)$$

$$d(x) = \frac{1 - (-x+3)(x-1)}{x-1}$$

$$d(x) = \frac{1 - (-x^2+x+3x-3)}{x-1}$$

$$d(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-1}$$

$$d(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1}$$

Pour tout $x > 1$ on a

$(x-2)^2 > 0$ et $x-1 > 0$

donc $d(x) > 0$

donc $f(x) - (-x+3) > 0$

donc $f(x) > \underline{-x+3}$

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente Δ sur $]1;+\infty[$

Exercice 5

Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dan un repère du plan, la courbe de g passe par le point A de coordonnées $(3;-4)$.
On nomme $\mathcal{T}_A$ la tangente à la courbe de g en A.
$\mathcal{T}_A$ est parallèle à la droite Δ d'équation $y = 6 - 2x$.

Déterminer une équation de $\mathcal{T}_A$

Si T_A est parallèle à Δ alors le coefficient directeur de T_A est le même que celui de Δ, c'est-à-dire $-2 = f'(x_A) = f'(3)$

De plus la courbe de g passe par $A(3;-4)$ et Δ est tangente en A donc passe aussi par A et donc

$f(x_A) = y_A = -4$

D'après la formule du cours, une équation de la tangente Δ en A est facultatif pour l'instant.

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

équivaut à

$$\iff y = -2(x-3) + (-4)$$

équivaut à

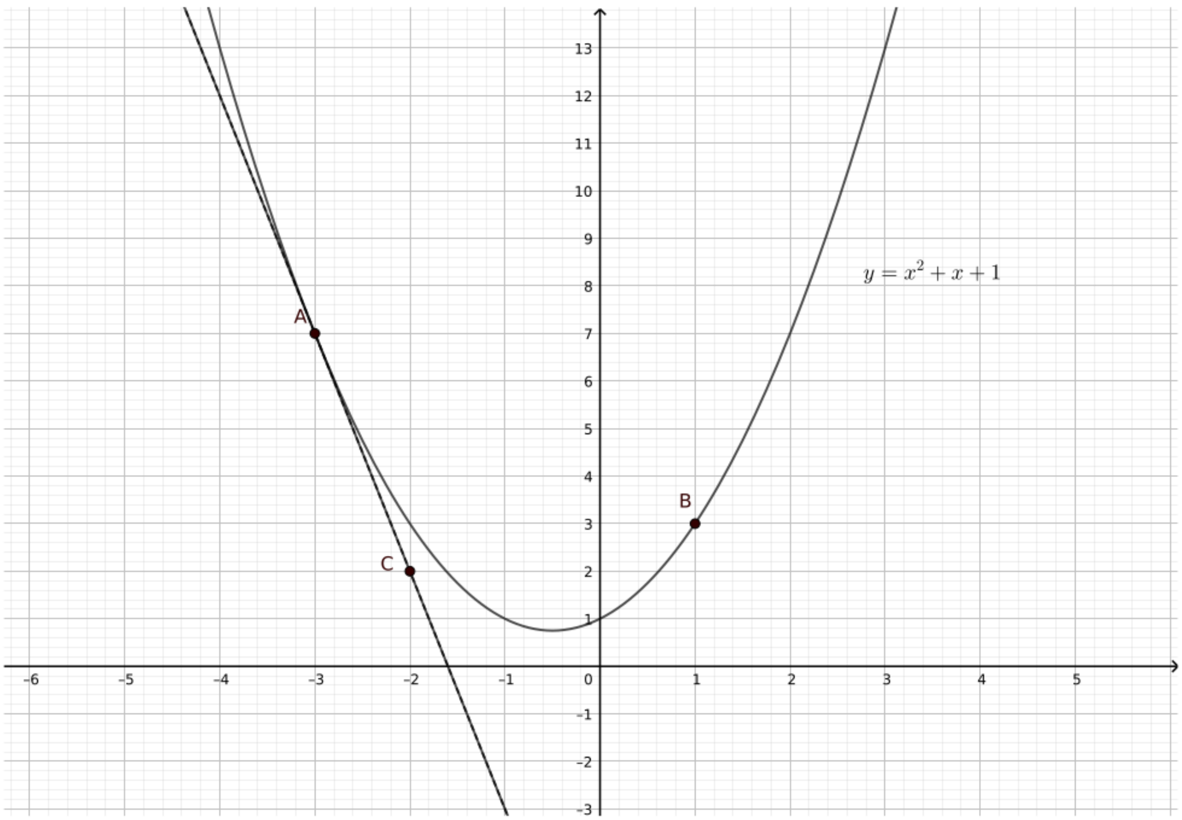
$$\iff y = -2x + 2$$

Une équation de T_A est donc :

$$\boxed{y = -2x + 2}$$

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$.
On a représenté ci-dessous une partie de la courbe de f dans un repère orthogonal du plan.
Les points A et B de la courbe de f ont respectivement pour coordonnées $A(-3\,;7)$ et $B(1\,;3)$.
Le point C a pour coordonnées $(-2\,;2)$.



1. La droite (AC) est tangente à la courbe de f au point d'abscisse A.
En déduire la valeur exacte de $f'(-3)$.

1) $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente (AC) au point A d'abscisse -3, donc

$$f'(-3) = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2-7}{-2-(-3)} = -5$$

On a donc $\boxed{f'(-3) = -5}$

2. On veut déterminer le nombre dérivé de f en 1.

a. Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour que `taux_variation(h)` renvoie le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ pour $h \neq 0$.

```python
def f(x):
    return x ** 2 + x + 1


def taux_variation(h):
    if h == 0:
        return None #calcul impossible
```



```python
    else:
        return (f(1+h)-f(1))/h
```

b. On donne ci-après quelques valeurs de `taux_variation(h)` évaluées dans une console `Python`. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du nombre dérivé de f en 1 ? Argumenter.

```
>>> for h in [-1, -0.1, -0.01, -0.001, 0.001, 0.01, 0.1 ,1]:
...     print("Le taux de variation pour h =", h, " est ",
    taux_variation(h))
...
Le taux de variation pour h = -1 est 2.0
Le taux de variation pour h = -0.1 est 2.9000000000000004
Le taux de variation pour h = -0.01 est 2.9900000000000038
Le taux de variation pour h = -0.001 est 2.998999999999974
Le taux de variation pour h = 0.001 est 3.0009999999993653
Le taux de variation pour h = 0.01 est 3.0100000000000016
Le taux de variation pour h = 0.1 est 3.100000000000005
Le taux de variation pour h = 1 est 4.0
```

c. Démontrer que pour tout réel $h \neq 0$, on a $f(1+h) - f(1) = 3h + h^2$.

d. En déduire la preuve de la conjecture formulée à la question **2. b.**

b) On peut observer que lorsque h tend vers 0, le taux de variation $(f(1+h)-f(1))/h$ tend vers 3.

On peut donc conjecturer que $f'(1)=3$

c) Pour tout réel $h \neq 0$, on a

$f(1+h)-f(1) = (1+h)^2+(1+h)+1-(1^2+1+1)$

$f(1+h)-f(1) = 1+2h+h^2+h-1$

$\boxed{f(1+h)-f(1) = 3h+h^2}$

d) Pour tout réel $h \neq 0$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{3h+h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(3+h)}{\cancel{h}} = 3+h$$

On fait tendre h vers 0 :

$$\lim_{h \to 0} 3+h = 3$$

donc $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 3$

Par définition, f est donc dérivable en 1 et $\boxed{f'(1) = 3.}$

3. On admet que $f'(3) = 7$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

D'après une propriété du cours une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(3) \times (x-3) + f(3)$$

Or $f(3) = 3^2 + 3 + 1 = 13$
et $f'(3) = 7$

donc $\boxed{y = 7(x-3) + 13 = 7x - 8}$

est une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.