Exercice 1

Ce QCM comporte quatre questions; pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées : une seule est exacte.

1. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison $\dfrac{5}{2}$ et telle que $v_1 = 5$.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

Réponse A : $v_{2n} = 5 + \dfrac{5}{2}n$ | **Réponse B :** $v_{2n} = 5 + 5n$

Réponse C : $v_{2n} = \dfrac{5}{2} + 5n$ | **Réponse D :** $v_{2n} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{2}n$

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et telle que $u_2 = 20$.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

Réponse A : $u_n = \dfrac{20}{2^n}$ | **Réponse B :** $u_n = \dfrac{80}{2^n}$

Réponse C : $u_n = 20 + \dfrac{n-2}{2}$ | **Réponse D :** $u_n = \dfrac{5}{2^n}$

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0 \neq 0$.
La somme de termes consécutifs $u_{30} + u_{41} + \ldots + u_{69}$ est égale à :

Réponse A : $u_{30} \times \dfrac{1-q^{39}}{1-q}$ | **Réponse B :** $u_{30} \times \dfrac{1-q^{40}}{1-q}$

Réponse C : $39 \times \dfrac{u_{30} + u_{69}}{2}$ | **Réponse D :** $40 \times \dfrac{u_{30} + u_{69}}{2}$

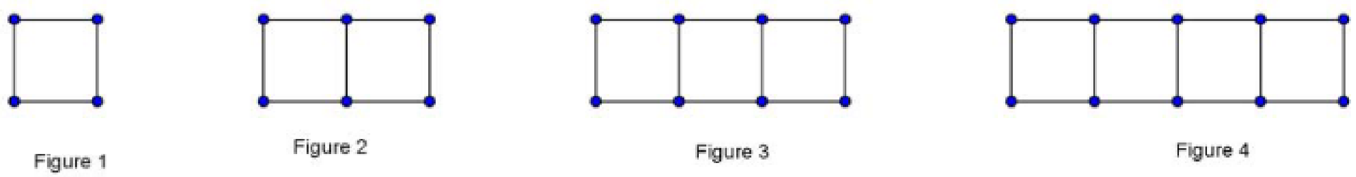
4. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0 \neq 0$.
La somme de termes consécutifs $u_{30} + u_{41} + \ldots + u_{69}$ est égale à :

Réponse A : $u_{30} \times \dfrac{1-q^{39}}{1-q}$ | **Réponse B :** $u_{30} \times \dfrac{1-q^{40}}{1-q}$

Réponse C : $39 \times \dfrac{u_{30} + u_{69}}{2}$ | **Réponse D :** $40 \times \dfrac{u_{30} + u_{69}}{2}$

Exercice 2

On considère une suite logique de figures constituées d'allumettes. On donne les quatre premières figures ci-dessous. Chaque nouvelle figure contient un carré de plus que la précédente.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre d'allumettes utilisées pour construire la figure n.
Ainsi on a $u_1 = 4$, $u_2 = 7$, $u_3 = 10$ et $u_4 = 13$.



1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmétique et préciser sa raison.

2. **a.** Combien d'allumettes seront nécessaires pour construire la figure 10 ?

b. Soit n un entier supérieur ou égale à 1, combien d'allumettes seront nécessaires pour construire la figure n ?

c. À partir de quelle valeur de l'entier $n \geqslant 1$ faudra-t-il plus de 1000 allumettes pour construire la figure n ?

Exercice 3

Partie A

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de premier terme $u_0 = -140$ et de raison $0,9$.

1. Soit n un entier naturel, exprimer u_n en fonction de n.

2. On considère la fonction Python ci-dessous :

```python
def mystere(n):
    u = -140
    lis = [u]
    for k in range(n):
        u = u * 0.9
        lis.append(u)
    return lis
```

Donner la valeur renvoyée par `mystere(3)` avec des valeurs numériques exactes.

3. Donner une valeur approchée de u_{15} arrondie à l'unité près.

4. Compléter la fonction Python `seuil` ci-dessous pour que `seuil(-40)` renvoie le plus petit entier naturel n tel que $-40 < u_n$.

```python
def seuil(s):
    n = 0
    u = -140
    while ............... :
        u = ...............
        n = ...............
    return ......
```

Partie B

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois;
- la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.
Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.
Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$, où, pour tout entier naturel n, v_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $v_0 = 280$.
On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $v_{n+1} = 0,9v_n + 42$.

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système de location au mois de février 2019 ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = v_n - 420$.
   a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme -140 c'est-à-dire que c'est exactement la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ étudiée dans la **Partie A**.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n,on a $v_n = -140 \times 0,9^n + 420$.
   c. Existe-t-il un entier naturel n tel que $v_n \geqslant 421$? Justifier.
3. La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande.

   À partir de quelle date le nombre de voitures initial sera-t-il insuffisant ?

   Expliciter la démarche.

Exercice 1 *correction*

1. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison $\frac{5}{2}$ et telle que $v_1 = 5$.
   Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$v_{2n} = v_1 + (2n-1)\times\frac{5}{2} = 5 + (2n-1)\times\frac{5}{2} = \frac{5}{2} + 5n$$

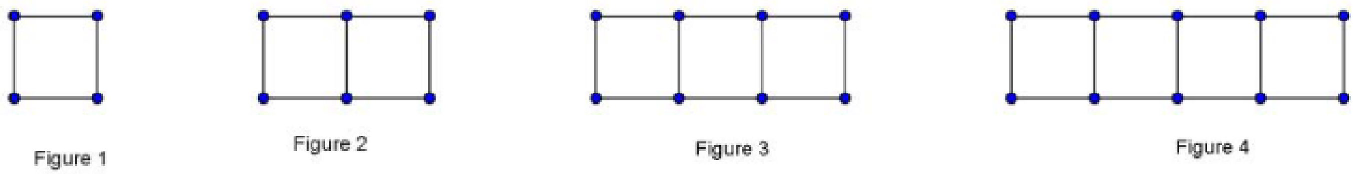
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et telle que $u_2 = 20$.
   Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$u_n = u_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 20\times 2^2 \times \frac{1}{2^n} = \frac{80}{2^n}$$

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0 \neq 0$.
   La somme de termes consécutifs $u_{30} + u_{41} + \ldots + u_{69}$ est égale à : $40 \times \frac{u_{30}+u_{69}}{2}$.
4. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0 \neq 0$.
   La somme de termes consécutifs $u_{30} + u_{41} + \ldots + u_{69}$ est égale à : $u_{30} \times \frac{1-q^{40}}{1-q}$.

Exercice 2 *correction*

On considère une suite logique de figures constituées d'allumettes. On donne les quatre premières figures ci-dessous. Chaque nouvelle figure contient un carré de plus que la précédente.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre d'allumettes utilisées pour construire la figure n.
Ainsi on a $u_1 = 4$, $u_2 = 7$, $u_3 = 10$ et $u_4 = 13$.



1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} = u_n + 3$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmétique de raison 3.
2. **a.** Le nombre d'allumettes nécessaires pour construire la figure 10 est :

$$u_{10} = u_1 + (10-1)\times 3 = 4 + 9\times 3 = 31$$

   b. Soit n un entier supérieur ou égale à 1, le nombre d'allumettes pour construire la figure 10 la figure n est :

$$u_n = u_1 + (n-1)\times 3 = 4 + 3n - 3 = 1 + 3n$$

   c. Pour déterminer à partir de quelle valeur de l'entier $n \geqslant 1$ il faudra plus de 1000 allumettes pour construire la figure n, on résout l'inéquation :

$$u_n > 1000 \Longleftrightarrow 1 + 3n > 1000 \Longleftrightarrow n > 333$$

   Il faudra donc plus de 1000 allumettes à partir de $n = 334$.

Exercice 3 *correction*

Partie A

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de premier terme $u_0 = -140$ et de raison $0,9$.

1. Pour tout entier n naturel, on a $u_n = u_0 \times 0,9^n = -140 \times 0,9^n$.

2. On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def mystere(n):
    u = -140
    lis = [u]
    for k in range(n):
        u = u * 0.9
        lis.append(u)
    return lis
```

La valeur renvoyée par `mystere(3)` est :

```
>>> mystere(3)
[-140, -126.0, -113.4, -102.06]
```

3. On a $u_{15} = -140 \times 0,9^{15} \approx -29$.

4. La fonction Python `seuil` ci-dessous est telle que `seuil(-40)` renvoie le plus petit entier naturel n tel que $-40 < u_n$.

```
def seuil(s):
    n = 0
    u = -140
    while u <= -40 :
        u = u * 0.9
        n = n + 1
    return n
```

Partie B

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
- la location commence le 1^er^ jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.
Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.
Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$, où, pour tout entier naturel n, v_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $v_0 = 280$.
On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $v_{n+1} = 0,9v_n + 42$.

1. Au mois de février 2019 le nombre de voitures louées est $v_1 = 0,9v_0 + 42 = 0,9 \times 280 + 42 = 294$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = v_n - 420$.

a. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_{n+1} - 420 = 0,9v_n + 42 - 420 \\ u_{n+1} &= 0,9v_n - 9 \times 42 \\ u_{n+1} &= 0,9(v_n - 420) = 0,9u_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $u_0 = v_0 - 420 = 280 - 420 = -140$.

b. Par propriété des suites géométriques, on en déduit que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 \times 0,9^n = -140 \times 0,9^n$$

Or $v_n = u_n + 420$ donc

$$v_n = 420 - 140 \times 0,9^n$$

c. Pour tout entier naturel n, on a $-140 \times 0,9^n < 0$ donc $420 - 140 \times 0,9^n < 420$, or $420 < 421$ donc $v_n < 421$.

On en déduit qu'il n'existe pas d'entier naturel n tel que $v_n \geqslant 421$.

3. La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande.

Pour déterminer à partir de de quelle date le nombre de voitures initial sera insuffisant, on peut exécuter un algorithme de seuil déterminant le plus petit entier n tel que :

$$v_n > 380 \iff u_n + 420 > 380 \iff u_n > -40$$

Par balayage avec la calculatrice, on trouve que $v_n > 380$ à partir de l'entier $n = 12$. Au bout de 12 mois soit un an, le nombre initial de véhicules ne sera donc plus suffisant.