Exercice 1

1. Soit la fonction f définie et dérivable sur $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ telle que $f(x)=\sqrt{3x+1}$.

Pour tout réel x, $f'(x)$ est égale à :

Réponse A : $f'(x)=3\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Réponse B : $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}$

Réponse C : $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

Réponse D : $f'(x)=3\sqrt{3x+1}$

2. Soit g la fonction définie et dérivable sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[$ telle que $g(x)=x-1+\frac{1}{1-3x}$.

Pour tout réel $x<\frac{1}{3}$, $g'(x)$ est égale à :

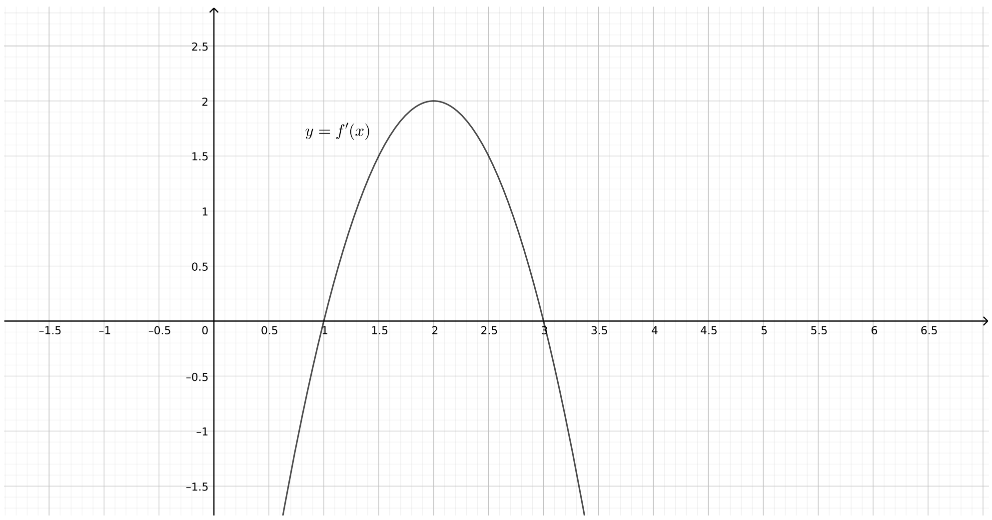
Réponse A : $1-\frac{3}{(1-3x)^2}$

Réponse B : $1+\frac{3}{1-3x}$

Réponse C : $1+\frac{3}{(1-3x)^2}$

Réponse D : $1-\frac{1}{(1-3x)^2}$

3. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on donne ci-dessous une partie de la courbe de sa fonction dérivée f' :



Parmi les tableaux de variations ci-dessous déterminer celui qui représente la fonction f :

Tableau 1

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Tableau 2

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Tableau 3

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Tableau 4

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Réponse A : **Tableau 1**

Réponse B : **Tableau 2**

Réponse C : **Tableau 3**

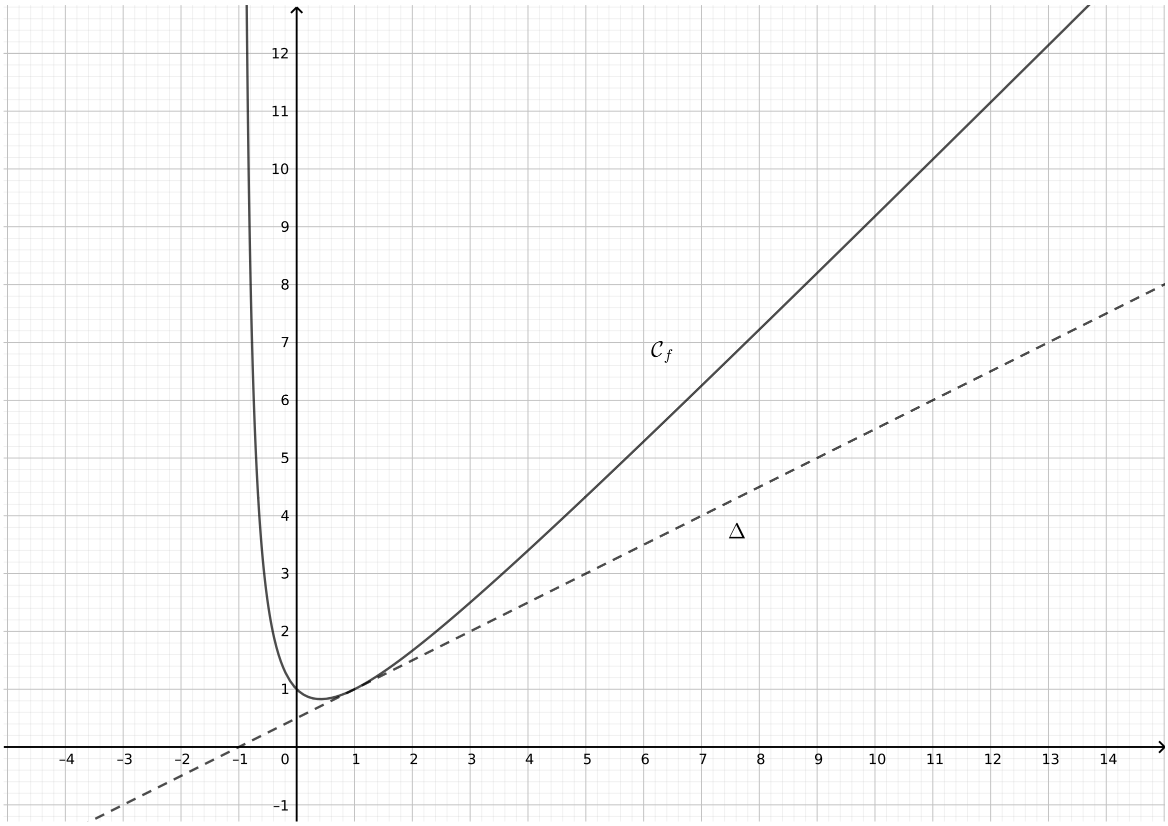
Réponse D : **Tableau 4**

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

On donne une représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormé du plan.



On admet que f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$.

1. Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-1\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

2. **a.** Déterminer le signe du trinôme x^2+2x-1 sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

b. Déterminer les variations de f sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 1.

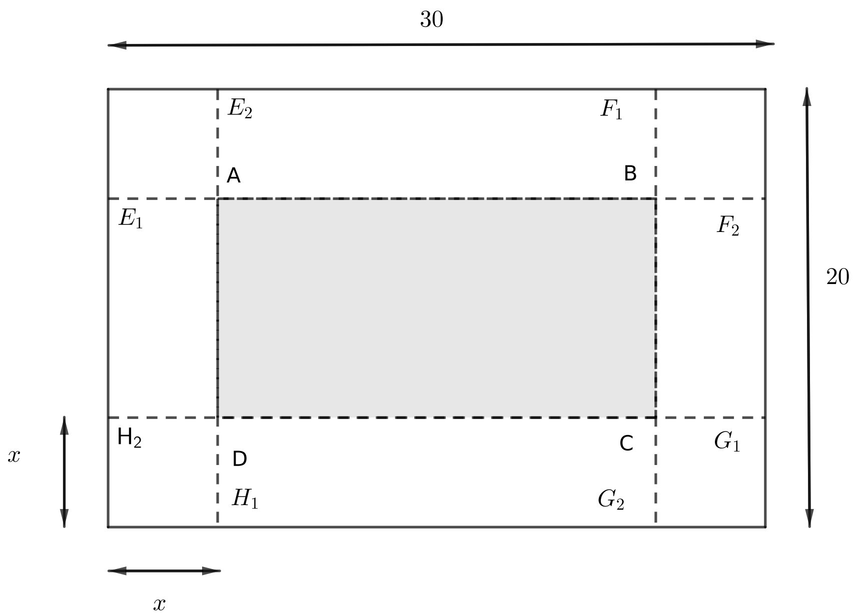
b. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $]-1\,;+\infty[$, on a :

$$f(x) - \frac{x+1}{2} = \frac{(x-1)^2}{2(x+1)}$$

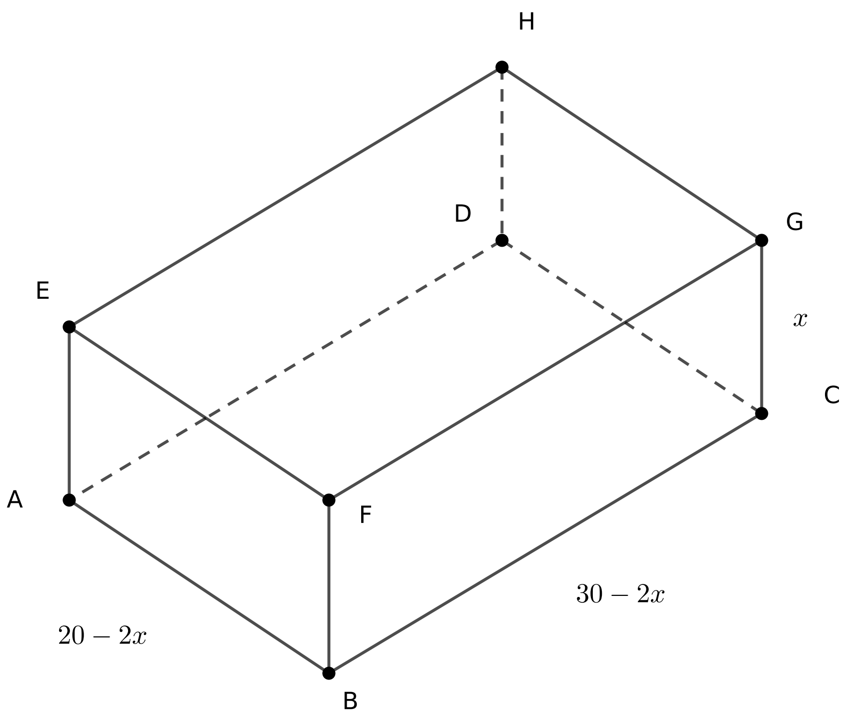
c. Étudier les positions relatives de la tangente Δ et de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

Exercice 3

On écorne les quatre coins d'un rectangle de carton de 30 cm sur 20 cm, en découpant quatre carrés de côté x. On obtient le patron d'une boîte rectangulaire.



En relevant perpendiculairement à la base rectangulaire $ABCD$, les quatre rectangles latéraux, on obtient un prisme $ABCDEFGH$.



1. Justifier que x varie dans l'intervalle $[0\,;\,10]$.

2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,10]$, le volume en centimètres cubes du prisme $ABCDEFGH$ est donné par :

$$V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$$

3. V est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,10]$.

Étudier les variations de la fonction V sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

4. Donner une valeur approchée au millimètres près de la valeur de x pour laquelle le volume $V(x)$ est maximal.

Exercice 4

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
- la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.
Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.
Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$, où, pour tout entier naturel n, v_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $v_0 = 280$.
On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $v_{n+1} = 0,9v_n + 42$.

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système de location au mois de février 2019 ?

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = v_n - 420$.

- **a.** Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme -140 c'est-à-dire que c'est exactement la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ étudiée dans la **Partie A**.
- **b.** En déduire que pour tout entier naturel n,on a $v_n = -140 \times 0,9^n + 420$.
- **c.** Existe-t-il un entier naturel n tel que $v_n \geqslant 421$? Justifier.