Exercice 1

1. Soit la fonction f définie et dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$ telle que $f(x)=\sqrt{3x+1}$.

Pour tout réel x, $f'(x)$ est égale à :

Réponse A : $f'(x)=3\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Réponse B : $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}}$

Réponse C : $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ $\Rightarrow$ **Bonne réponse**

Réponse D : $f'(x)=3\sqrt{3x+1}$

2. Soit g la fonction définie et dérivable sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[$ telle que $g(x)=x-1+\dfrac{1}{1-3x}$.

Pour tout réel $x<\dfrac{1}{3}$, $g'(x)$ est égale à :

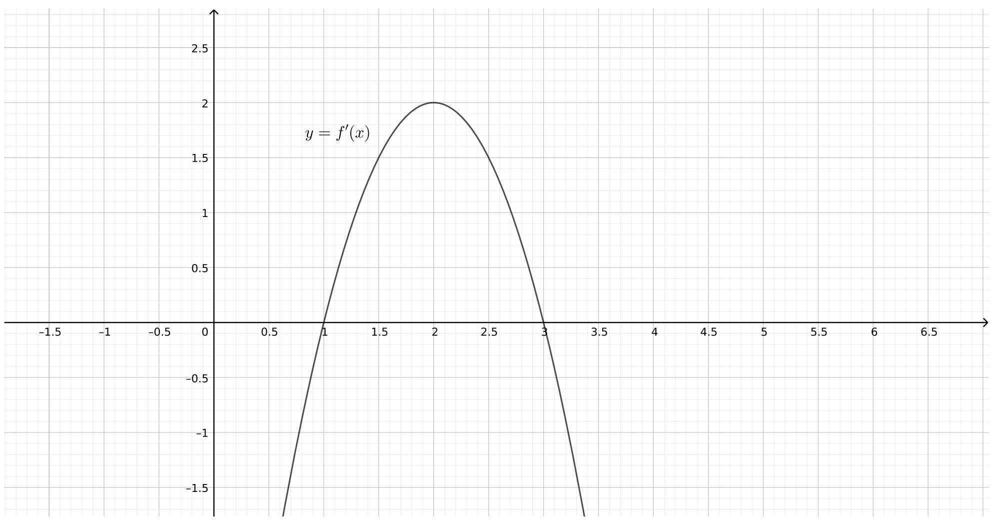
Réponse A : $1-\dfrac{3}{(1-3x)^2}$

Réponse B : $1+\dfrac{3}{1-3x}$

Réponse C : $1+\dfrac{3}{(1-3x)^2}$ $\Rightarrow$ **Bonne réponse**

Réponse D : $1-\dfrac{1}{(1-3x)^2}$

3. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on donne ci-dessous une partie de la courbe de sa fonction dérivée f' :



- La fonction f' est négative sur $]-\infty\,;1]$ donc f est décroissante sur $]-\infty\,;1]$.
- La fonction f' est positive sur $[1\,;3]$ donc f est croissante sur $[1\,;3]$.
- La fonction f' est négative sur $[3\,;+\infty[$ donc f est décroissante sur $[3\,;+\infty[$.

Le tableau de variations de f est donc le tableau 3.

Tableau 3

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		↘		↗		↘	

Exercice 2

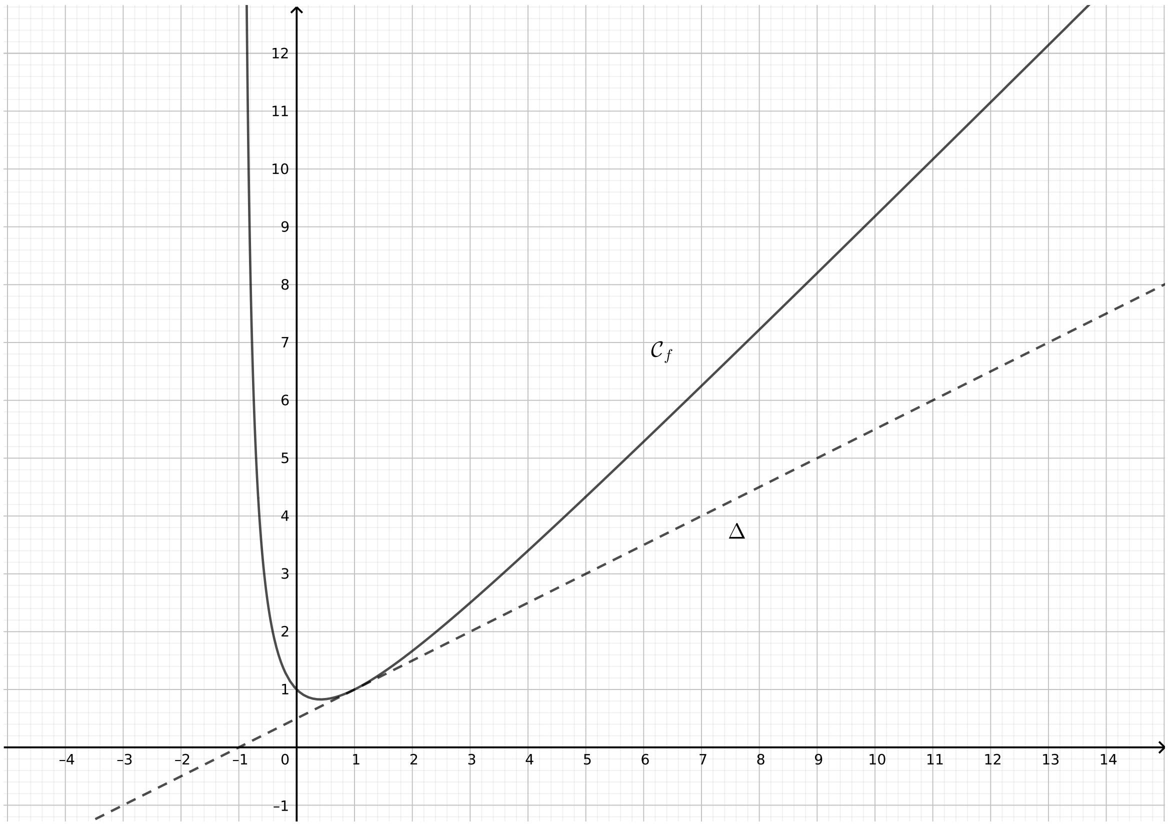
Correction en classe.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

On donne une représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormé du plan.



On admet que f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$.

1. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on a $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec u et v dérivables sur $]-1\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2+1 & v(x) &= x+1 \\ u'(x) &= 2x & v'(x) &= 1 \end{aligned}$$

D'après une propriété du cours :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

2. a. Déterminer le signe du trinôme x^2+2x-1 sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

- $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$.
- $\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines distinctes :
  - $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2}$
  - $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1+\sqrt{2}$
- On applique la propriété du signe d'un trinôme :
  - $x^2+2x-1 < 0$ si $x \in \left]-1\,;\,-1+\sqrt{2}\right[$
  - $x^2+2x-1 = 0$ si $x = -1+\sqrt{2}$
  - $x^2+2x-1 > 0$ si $x \in \left]-1+\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$

b. Déterminer les variations de f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

Pour tout $x \in]-1\,;\,+\infty[$ on a $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$ est du signe de x^2+2x-1. D'après la question précédente :

- $f'(x) \leqslant 0$ si $x \in \left]-1\,;\,-1+\sqrt{2}\right]$ donc f est décroissante sur $\left]-1\,;\,-1+\sqrt{2}\right]$.
- $f'(x) \geqslant 0$ si $x \in \left]-1+\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$ donc f est croissante sur $\left]-1+\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse 1.

Δ a pour équation $y = f'(1)\times(x-1)+f(1) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}(x-1)+1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

b. Pour tout réel x appartenant à $]-1\,;\,+\infty[$, on a :

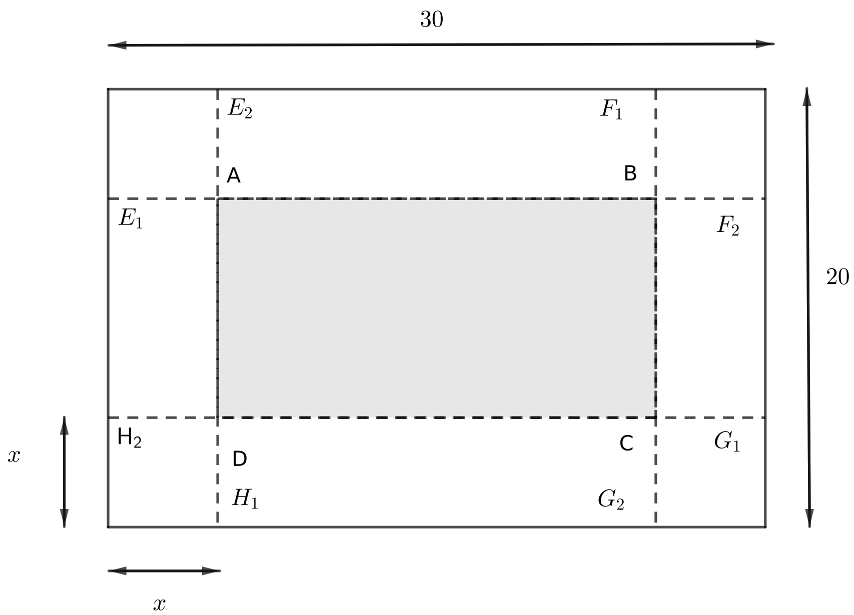
$$f(x) - \frac{x+1}{2} = \frac{2(x^2+1)}{2(x+1)} - \frac{(x+1)^2}{2(x+1)}$$
$$f(x) - \frac{x+1}{2} = \frac{2x^2+2}{2(x+1)} - \frac{x^2+2x+1}{2(x+1)} = \frac{2x^2+2-x^2-2x-1}{2(x+1)} = \frac{(x-1)^2}{2(x+1)}$$

c. Étudier les positions relatives de la tangente Δ et de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.

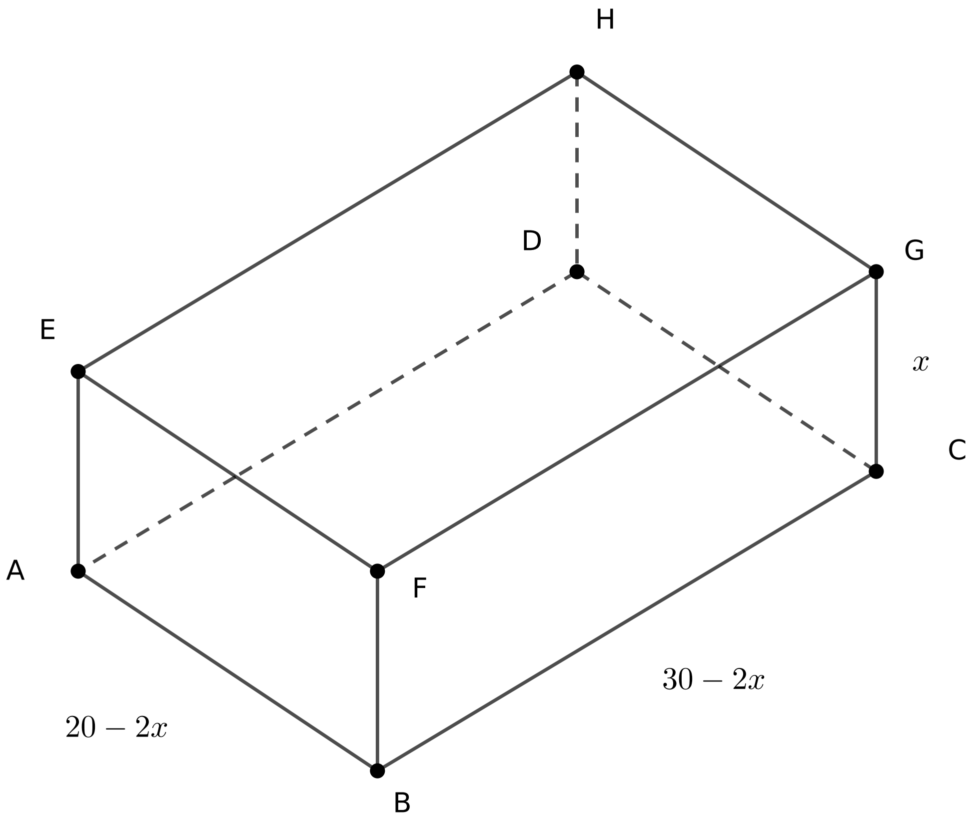
- Pour tout réel x appartenant à $]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$, on a $\dfrac{(x-1)^2}{2(x+1)} > 0$ donc $f(x) - \dfrac{x+1}{2} > 0$ donc $\mathscr{C}_f$ au-dessus de sa tangente Δ.
- Pour $x = 1$ on a $f(x) - \dfrac{x+1}{2} = 0$ donc $\mathscr{C}_f$ et Δ ont un point d'intersection de coordonnées $(1\,;\,1)$.

Exercice 4

On écorne les quatre coins d'un rectangle de carton de 30 cm sur 20 cm, en découpant quatre carrés de côté x. On obtient le patron d'une boîte rectangulaire.



En relevant perpendiculairement à la base rectangulaire $ABCD$, les quatre rectangles latéraux, on obtient un prisme $ABCDEFGH$.



1. Justifier que x varie dans l'intervalle $[0\,;10]$.

Les carrés étant découpés dans les coins du rectangle de base de dimensions 20×30, x doit vérifier le système de contraintes :

$$\begin{cases} 0 \leqslant 2x \leqslant 20 \\ 0 \leqslant 2x \leqslant 30 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 \leqslant x \leqslant 15 \end{cases} \iff 0 \leqslant x \leqslant 10$$

2. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;10]$, le volume $V(x)$ en centimètres cubes du prisme $ABCDEFGH$ est donné par le produit de l'aire de la base rectangulaire $(20-2x)\times(30-2x)$ par la hauteur x :

$$V(x) = (20-2x)\times(30-2x)\times x = (600-100x+4x^2)x = 4x^3 - 100x^2 + 600x$$

3. V est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,10]$.
Pour tout $x \in [0\,;\,10]$, on a :

$$V'(x) = 4 \times 3x^2 - 100 \times 2x + 600 = 12x^2 - 200x + 600$$

Déterminons le signe du trinôme $12x^2 - 200x + 600$ sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

- $\Delta = b^2 - 4ac = 200^2 - 4 \times 12 \times 600 = 11200$.
- $\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines distinctes :
  - $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{200-\sqrt{11200}}{24} = \dfrac{25-5\sqrt{7}}{3}$
  - $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{200+\sqrt{11200}}{24} = \dfrac{25+5\sqrt{7}}{3}$
- On applique la propriété du signe d'un trinôme :
  - $V'(x) = 12x^2 - 200x + 600 < 0$ si $x \in \left[0\,;\,\dfrac{25-5\sqrt{7}}{3}\right]$
  - $V'(x) = 12x^2 - 200x + 600 = 0$ si $x = \dfrac{25-5\sqrt{7}}{3} \approx 3{,}92$
  - $V'(x) = 12x^2 - 200x + 600 > 0$ si $x \in \left]\dfrac{25-5\sqrt{7}}{3}\,;\,10\right[$

On en déduit les variations de la fonction V sur l'intervalle $[0\,;\,10]$:

- V est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{25-5\sqrt{7}}{3}\right]$
- V atteint un maximum global en $x = \dfrac{25-5\sqrt{7}}{3} \approx 3{,}92$
- V est décroissante sur $\left]\dfrac{25-5\sqrt{7}}{3}\,;\,10\right[$

4. D'après la question précédente, une valeur approchée au millimètres près de la valeur de x pour laquelle le volume $V(x)$ est maximal est $x \approx 3{,}9$ cm, valeur approchée au millimètre près.

Exercice 5

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
- la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.
Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.
Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$, où, pour tout entier naturel n, v_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $v_0 = 280$.
On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $v_{n+1} = 0{,}9v_n + 42$.

1. Au mois de février 2019 le nombre de voitures louées est $v_1 = 0,9v_0 + 42 = 0,9 \times 280 + 42 = 294$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = v_n - 420$.

a. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = v_{n+1} - 420 = 0,9v_n + 42 - 420$$
$$u_{n+1} = 0,9v_n - 9 \times 42$$
$$u_{n+1} = 0,9(v_n - 420) = 0,9u_n$$

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $u_0 = v_0 - 420 = 280 - 420 = -140$.

b. Par propriété des suites géométriques, on en déduit que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 \times 0,9^n = -140 \times 0,9^n$$

Or $v_n = u_n + 420$ donc

$$v_n = 420 - 140 \times 0,9^n$$

c. Pour tout entier naturel n, on a $-140 \times 0,9^n < 0$ donc $420 - 140 \times 0,9^n < 420$, or $420 < 421$ donc $v_n < 421$.
On en déduit qu'il n'existe pas d'entier naturel n tel que $v_n \geqslant 421$.