1 Suite majorée, minorée ou bornée

Définition 1

On considère une suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

- Une suite réelle (u_n) est **majorée** par la constante M, appelée **majorant** de u, si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant M$.
- Une suite réelle (u_n) est **minorée** par la constante m, appelée **minorant** de u, si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant M$.
- Une suite réelle (u_n) qui est **minorée** et **majorée**, est dite **bornée**.

Capacité 1 ***Démontrer qu'une suite est bornée***

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{\cos(n)}{1+\mathrm{e}^n}$.

1. Démontrer que u est majorée par $\dfrac{1}{2}$.
2. Démontrer que u est bornée.

2 Sens de variation d'une suite

2.1 Définition

Définition 2

On considère une suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

- Une suite réelle (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite réelle (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite réelle (u_n) est **constante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} = u_n$.

Corollaire ***admis***

- Si une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p alors pour tout couple d'entiers (n, m) avec $p \leqslant n \leqslant m$, on a $u_p \leqslant u_n \leqslant u_m$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p alors pour tout couple d'entiers (n, m) avec $p \leqslant n \leqslant m$, on a $u_p \geqslant u_n \geqslant u_m$.

Remarque 1
Une suite croissante (respectivement décroissante) à partir de son premier rang, est dite croissante (respectivement décroissante).

Capacité 2 ***Utiliser le sens de variation d'une suite***
On considère une suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

1. Démontrer que si (u_n) est décroissante alors elle est majorée.
2. Démontrer que si (u_n) est croissante alors elle est minorée.
3. Démontrer que la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2.2 Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite

Méthode
Il existe plusieurs méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n).

- Si le terme général de (u_n) est donné par une formule explicite $u_n = f(n)$ et s'il existe un entier naturel p tel que f monotone sur $[p\,;+\infty[$ alors :
  - (u_n) est décroissante à partir du rang p si f décroissante sur $[p\,;+\infty[$.
  - (u_n) est croissante à partir du rang p si f croissante sur $[p\,;+\infty[$.
- On peut étudier le **signe de la différence** $u_{n+1} - u_n$ et démontrer qu'il existe un rang p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n$ est de signe constant.
  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ » alors (u_n) est décroissante à partir du rang p.
  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ » alors (u_n) est croissante à partir du rang p.
- En terminale, on pourra utiliser un **raisonnement par récurrence** …

Capacité 3 ***Choisir une méthode adaptée pour étudier le sens de variation d'une suite***

1. $\boxed{\textbf{Méthode 1}}$: *Si $u_n = f(n)$, étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$*

   Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$, par $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n + 1}$.

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$. On a pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = f(n)$.

   - Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $f'(x)$.
     ATTENTION, on peut dériver la fonction f mais pas la suite (u_n) car celle-ci n'est pas définie sur un intervalle !!!
   - En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout

entier $n \geqslant 0$ et le sens de variation de (u_n).

2. $\boxed{\textbf{Méthode 2}}$: *Etudier le signe de* $u_{n+1} - u_n$

   Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n(1 - 2u_n)$.

   ☞ Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

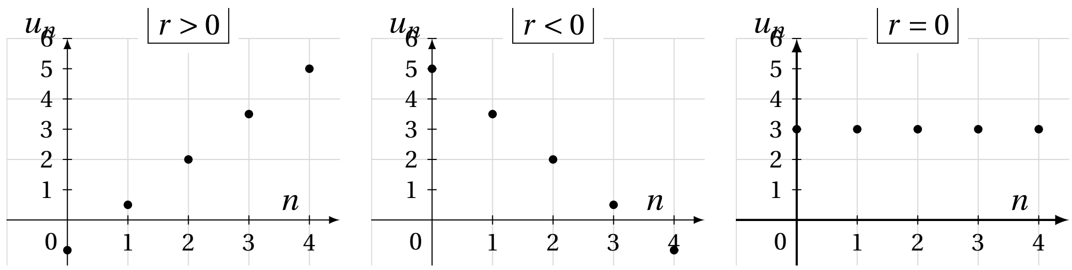
   ☞ Conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).

2.3 Sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique

Propriété 1 ***Suites arithmétiques***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $r > 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si $r = 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $r < 0$.



Capacité 4 ***Étudier le sens de variation d'une suite arithmétique***

Dans chaque cas, u désigne une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$. On donne une expression de son terme général u_n. Déterminer la raison de la suite u et son sens de variation.

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 1 - \dfrac{5-2n}{3}$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = \left| -3 - 2n \right|$.

Propriété 2 ***Suites géométriques***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- <u>**Premier cas**</u> $\boxed{u_0 > 0}$.

  Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

  – $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $\boxed{1 < q}$.

  – $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $\boxed{0 < q < 1}$.

  – $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 si $q = 0$ et à partir du rang 0 si $q = 1$.

  – $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone si $\boxed{q < 0}$

- **Deuxième cas** $\boxed{u_0 > 0}$.

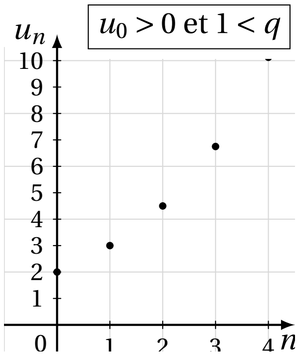
  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n$ est géométrique de même raison q et de premier terme $v_0 > 0$.

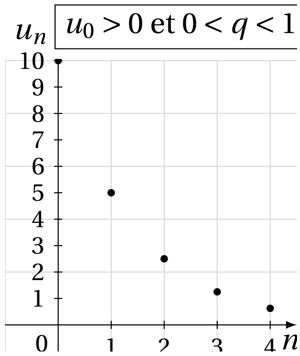
  On applique la propriété précédente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on en déduit par symétrie le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

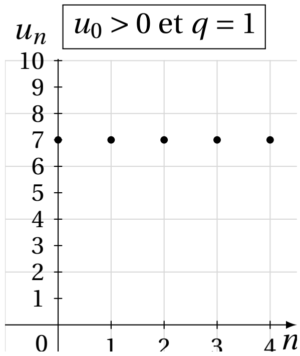
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $\boxed{1 < q}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $\boxed{0 < q < 1}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 si $q = 0$ et à partir du rang 0 si $q = 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone si $\boxed{q < 0}$

Les différents cas exposés ci-dessus sont compliqués à retenir. En pratique, la propriété peut se résumer ainsi :

- Si la raison q de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
- Si la raison q de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens de variation est fixé par la comparaison de deux termes consécutifs comme u_0 et u_1.







Capacité 5 *Étudier le sens de variation d'une suite arithmétique*

Dans chaque cas, u désigne une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$. On donne une expression de son terme général u_n. Déterminer la raison de la suite u et son sens de variation.

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 0,4 \times 1,5^n$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = -0,4 \times 1,5^n$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 4 \times 0,5^n$.
4. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = -4 \times 0,5^n$.
5. Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = \mathrm{e}^{1-n}$.