Histoire 1

Dans ses *Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain*, Leonhard Euler (1707 – 1783), modélise l'évolution de la population annuelle d'une ville par la relation de récurrence $p_{n+1} = \lambda p_n$ avec λ le rapport des naissances de l'année $n+1$ sur les naissance de l'année n supposé indépendant de n. Il s'agit d'un modèle d'évolution exponentiel.
Thomas Malthus (1766–1834) reprend l'idée d'une évolution exponentielle de la population (suite géométrique) et fait l'hypothèse que la capacité production suit plutôt une évolution linéaire (suite arithmétique) ce qui l'amène à préconiser une limitation des naissances.
Ce modèle est remis en cause vers 1840 par Pierre François Verhulst (1804 – 1849), dont le modèle logistique prend en compte la limitation de la population : la population p_{n+1} à l'année $n+1$ est proportionnelle à $p_n(M - p_n)$ où M est la population maximale contrainte par des facteurs limitants (place, nourriture ...).

1 Évolution linéaire ou exponentielle

Activité 1 ***Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire***

Un vendeur de logiciel propose un contrat d'assistance de deux ans maximum, comprenant l'installation à domicile et un conseiller joignable par téléphone pour 20 € le premier mois, puis 0,6 € de moins par rapport au mois précédent, et ainsi de suite. On note v_n la mensualité en euros au $n^{ième}$ mois.

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant 23$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
3. Calculer le montant de la mensualité au $12^{ième}$ mois et déterminer sans justifier une formule explicite de v_n pour tout entier n tel que $1 \leqslant n \leqslant 24$.
4. Compléter la fonction `cout()` ci-dessous, en pseudo-code et en `Python`, pour qu'elle retourne le coût total du contrat d'assistance sur 24 mois.

Algorithme

```
Fonction cout():
  v ⟵ 20
  s ⟵ v
  Pour ... ... ...
    v ⟵ ...
    s ⟵ ...
  Retourne s
```

Python

```python
def cout():
    v = 20
    s = v
    for .............:
        v = .........
        s = .........
    return s
```

Activité 2 ***Modéliser un phénomène discret à croissance exponentielle, voir la situation C page 9***

Au premier Janvier 2 016, on place un capital de 800 euros sur un compte bloqué, rémunéré au taux d'intérêts composés annuels de 2,5 %. On note C_n le capital en $2\,016 + n$.

1. Calculer C_1 et C_2, arrondir au centime près.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer C_{n+1} en fonction de C_n puis déterminer sans justifier une formule explicite de C_n.
3. Recopier et compléter la fonction ci-dessous et sa traduction en `Python` pour qu'elles retournent la première année où le capital dépassera `s` euros.
4. Faire un tableau des valeurs de C_n avec le mode Suite de la calculatrice pour déterminer la valeur de `seuil(1000)`.

Algorithme

```
Fonction seuil(s):
   c ⟵ 800
   n ⟵ 0
   Tant que ... ...
      c ⟵ ...
      n ⟵ n + 1
   Retourne n
```

Python

```python
def seuil(s):
    c = 800
    n = 0
    while c ... s:
        c = .........
        n = n + 1
    return n
```

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition

Définition 1

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que :

$$\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

$$u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Le réel r est la **raison** de la suite.

Propriété 1 ***Suite arithmétique et variation absolue***

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** si la **variation** $u_{n+1} - u_n$ entre deux termes consécutifs quelconques est égale à une constante r.

Capacité 1 *Caractériser une suite arithmétique*

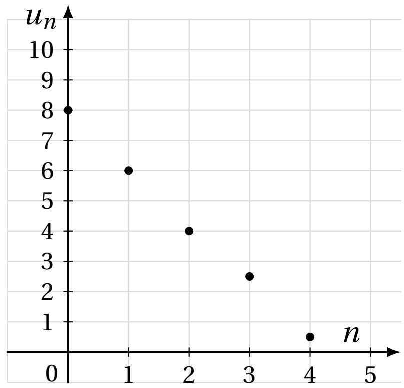
Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *Vraie* ou *Fausse* en justifiant la réponse.

- **Affirmation 1 :**

  La suite (u_n) dont on a représenté ci-contre les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 peut être arithmétique.

- **Affirmation 2 :**

  La suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ de terme général $v_n = (n+1)^2 - (n-2)^2$, est arithmétique.



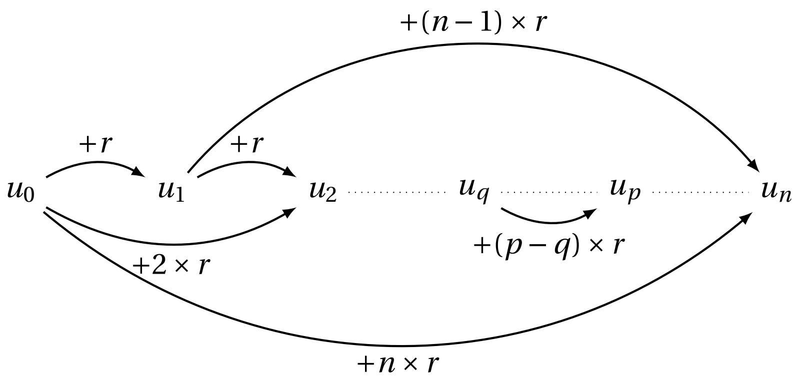
2.2 Calculs de termes et représentation graphique

Propriété 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + \cdots\cdots \times r$ et $u_n = u_1 + \cdots\cdots \times r$
- Pour tous entiers $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, $u_p = u_q + \cdots\cdots \times r$.

Une suite arithmétique est entièrement déterminée par la connaissance d'un terme et de sa raison.



Démonstration *détaillée p. 20*

Capacité 2 *Calculer le terme général d'une suite arithmétique, voir exos 1 et 2 p. 13*

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_1 = 10$.

	A	B
1	n	u_n
2	1	10
3	2	

a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

b. On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite (u_n). Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer u_2 ; cette formule « tirée vers le bas » dans la colonne devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite (u_n).

c. Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{43}.

2. Soit (w_n) une suite arithmétique telle que $w_{13} = -5$ et $w_{17} = 23$.

a. Soit r la raison de cette suite, exprimer $w_{17} - w_{13}$ en fonction de r. En déduire la valeur de r puis calculer w_1.

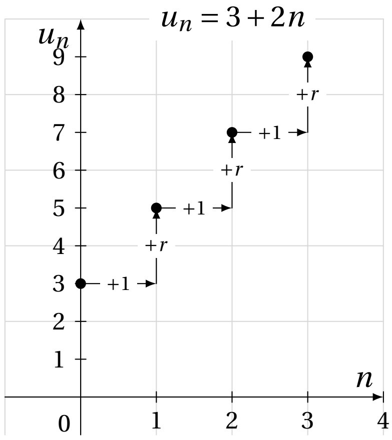
b. Exprimer w_n en fonction de n et calculer w_{50}.

Propriété 3

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r si et seulement s'il existe deux réels a et r tels que :

$$\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a + nr$$

Une suite est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique dans un repère est constituée de points alignés.
Une suite arithmétique modélise une **évolution linéaire**.



Démonstration

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit une suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de raison r.

  D'après la propriété précédente, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n = u_0 + nr$ donc $u_n = a + nr$ avec $a = u_0$.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ Soit une suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n = a + nr$.

  Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_{n+1} - u_n = a + (n+1)r - (a + nr) = r$ donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est arithmétique de raison r.

2.3 Somme des termes successifs

Propriété 4

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $q \in \mathbb{N}$ tel que $q \geqslant p$ on a :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{q-1} + u_q = (q-p+1) \times \frac{u_p + u_q}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier pour la suite arithmétique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration ***guidée p. 21***

....

....

....

....

....

....

....

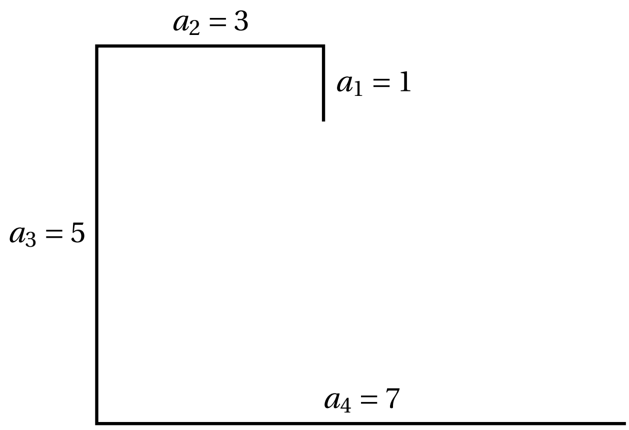
....

....

....

Capacité 3 ***Déterminer une relation pour une suite définie par un motif géométrique, voir exo 3 p. 13***

Un robot d'exploration spatiale se déplace en spirale sur la planète qu'il doit explorer. Il avance d'abord de 1 mètre puis tourne à gauche à angle droit, il avance de trois mètres puis tourne à gauche à angle droit et ainsi de suite. A chaque étape il incrémente de deux mètres son déplacement rectiligne.
On note a_n la longueur du $n^{\text{ième}}$ déplacement rectiligne du robot.



1. Déterminer la nature de la suite (a_n) puis une formule explicite de son terme général a_n.
2. Déterminer une formule explicite de la distance totale parcourue par le robot après n déplacements en ligne droite.
3. Le robot avance à la vitesse de 20 centimètres par seconde en ligne droite et met deux secondes pour tourner. Calculer le temps nécessaire pour que le robot parcourt exactement 1 kilomètre.

3 Suites géométriques

3.1 Définition

Définition 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** s'il existe un réel q tel que :

$$\text{pour tout entier } \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

$$u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$$

Le réel q est la **raison** de la suite.

Propriété 5

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne s'annule jamais est **géométrique** si et seulement si la **variation relative** $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ entre deux termes consécutifs quelconques est égale à une constante, c'est-à-dire si le **taux d'évolution** entre deux termes consécutifs est constant.
Une suite géométrique modélise une **évolution exponentielle**.

Démonstration

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne s'annule jamais.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \neq 0$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.

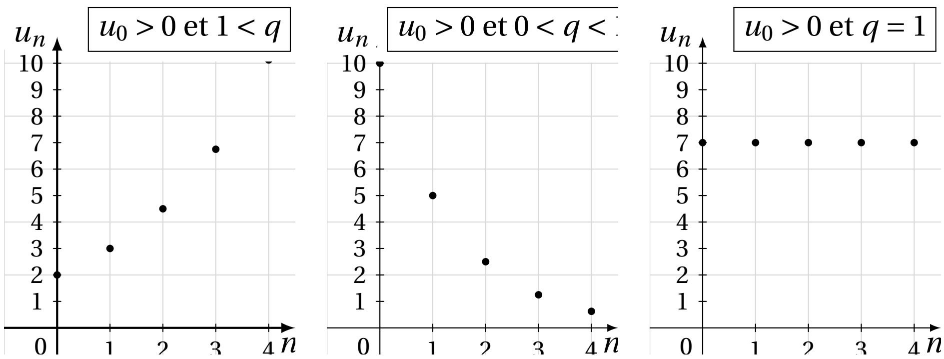
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = (q-1)u_n$$

on peut diviser par $u_n \neq 0$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = q - 1$$

Propriété 6 ***Représentation graphique d'une suite géométrique***

Dans un repère du plan, la représentation graphique d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q n'est pas constituée de points alignés sauf dans le cas où $q = 1$.

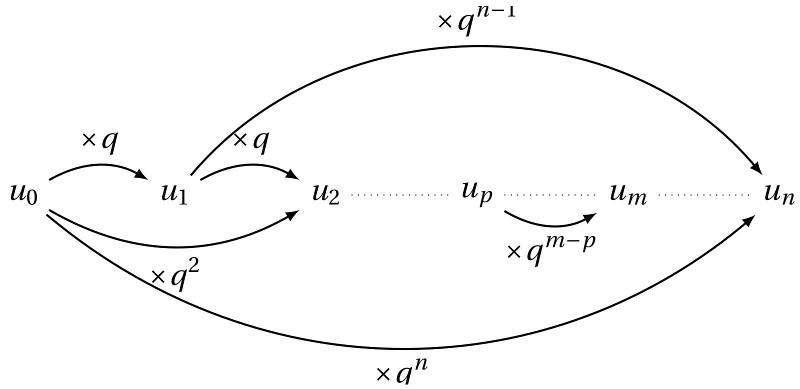


3.2 Calculs de termes

Propriété 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
- Pour tous entiers $p \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, $u_m = u_p \times q^{m-p}$.



Démonstration ***détaillée p. 20***

Capacité 4 ***Modéliser un phénomène discret à croissance exponentielle, calculer le terme général d'une suite géométrique, voir exos 1 et 2 p. 15***

La scintigraphie cardiaque est une technique d'imagerie qui permet d'examiner la qualité de l'irrigation du cœur par les artères coronaires.
Lors de cet examen, on injecte au patient un échantillon d'un isotope de Thallium d'activité radioactive 60 MBq (Méga Becquerel).
On appelle demi-vie le temps mis par une substance radioactive pour perdre la moitié de son activité.
Ainsi, après une demi-vie, l'activité radioactive de cet échantillon de Thallium est de 30 MBq et après deux demi-vies, l'activité radioactive de cet échantillon est de 15 MBq.
On note u_0 l'activité radioactive de cet échantillon (en MBq) à l'injection et u_n l'activité radioactive de cet échantillon (en MBq) après n demi-vies avec n entier naturel.

1. Donner les valeurs de u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. **a.** Exprimer u_n en fonction de n.
   b. Déterminer l'activité radioactive de cet échantillon après 5 demi-vies.
4. Écrire en `Python` une fonction `seuil()` qui retourne le plus petit entier n à partir duquel $u_n < 0,25$.
5. Sachant que la demi-vie de cet isotope de Thallium est d'environ 3 jours, déterminer le nombre de jours au bout desquels on est certain que l'activité radioactive de cet échantillon est strictement inférieure à 0,25 MBq.

3.3 Somme des termes successifs

Propriété 8

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Plus généralement, Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geqslant p$ on a :

$$\sum_{k=p}^{m} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{m-1} + u_m = u_p \times \frac{1-q^{m-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-raison^{\text{nombre de termes}}}{1-raison}$$

En particulier pour la suite géométrique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n$ avec $q \neq 1$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration *guidée p. 21*

☞ On démontre d'abord que pour tout réel $q \neq 1$ on a $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$:

....

....

....

....

....

☞ On démontre ensuite la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$:

....

....

....

....

Capacité 5 *Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, voir exo 3 p.15*

Pour tout entier naturel n, on considère la somme $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.

1. Exprimer s_n en fonction de n.
2. Quelle conjecture peut-on formuler sur la valeur de s_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Capacité 6 *Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique ou une question de dénombrement*

Une institutrice propose un atelier découpage pour ses élèves à partir d'une feuille de 400 cm^2.

Étape 1 l'élève partage d'abord la feuille en 9 carrés et découpe le carré central ;

Étape 2 l'élève partage alors les 8 carrés restant en 9 carrés égaux et découpe le carré central ;

Étapes suivantes l'élève répète le même procédé ...

1. On note u_n la surface restante de la feuille après n découpes. Ainsi $u_0 = 400$.
   - **a.** Justifier que la suite (u_n) est géométrique et déterminer sa raison.
   - **b.** Que peut-on conjecturer pour les valeurs de u_n lorsque n devient aussi grand que l'on veut ?
   - **c.** Recopier et compléter la fonction `seuil(s)` pour qu'elle retourne le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant$ `s`.
     Programmer cette fonction, quelle est la valeur retournée par `seuil(10)` ?
2. On note v_n le nombre de nouveaux carrés découpés lors de la $n^{ième}$ découpe avec $n \geqslant 1$. Ainsi $v_1 = 1$, $v_2 = 8$ ...
   - **a.** Justifier que la suite (v_n) est géométrique et déterminer sa raison.
   - **b.** Que peut-on conjecturer pour les valeurs de v_n lorsque n devient aussi grand que l'on veut ?
   - **c.** Recopier et compléter la fonction `somme(n)` pour qu'elle retourne t_n, le nombre total de carrés découpés après n découpes avec $n \geqslant 1$.
     Programmer cette fonction, quelle est la valeur retournée par `somme(10)` ?
   - **d.** Déterminer une formule explicite permettant de calculer t_n pour un entier $n \geqslant 1$.

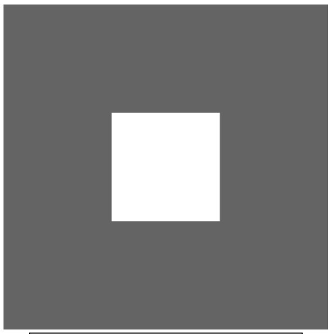
Algorithme de seuil

```
Fonction seuil(s):
  n ⟵ 0
  u ⟵ 400
  Tant que ... ...
    u ⟵ ...
    n ⟵ n + 1
  Retourne n
```

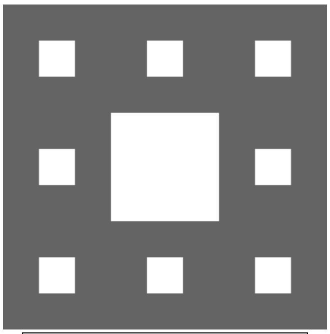
Python

```python
def seuil(s):
    n = 0
    u = 400
    while ..... :
        u = .........
        n = n + 1
    return n
```

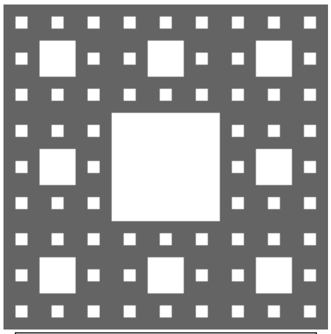
Étape 0 : 0 découpe



Étape 1 : 1 découpe



Étape 2 : 9 découpes



Étape 3 : 73 découpes

Calcul de somme

```
Fonction somme(n):
  v ⟵ 1
  t ⟵ ...
  Pour k allant de 2 à n
    v ⟵ ...
    t ⟵ ...
  Retourne t
```

Python

```python
def somme(n):
    v = 1
    t = ........
    for k in range(2, n + 1):
        v = .........
        t = .........
    return t
```