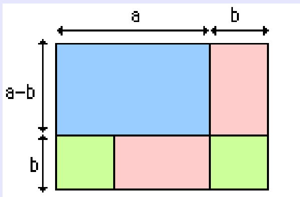
Histoire 1

☞ 4000 ans avant nous, les Babyloniens écrivaient des mathématiques en cunéiformes sur des tablettes d'argiles. Ils comptaient en base 60 que nous retrouvons dans notre système de mesure du temps. Ils connaissaient le théorème de Pythagore et savaient extraire des racines carrées. Retrouver l'égalité qu'ils utilisaient pour multiplier deux nombres a et b : $a \times b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

☞ Al-Khwarizmi est un mathématicien persan du neuvième siècle qui a écrit un important ouvrage posant les fondements de l'algèbre (de l'arabe *al jabr* pour réduction) et de la résolution des équations du second degré avec un système de numération décimal positionnel inspiré des Indiens. Le mot *algorithme* formé sur son nom nous est resté. Quelle égalité remarquable cette figure tirée de son ouvrage permet-elle de démontrer ?



1 Fonctions polynômes du second degré

1.1 Fonction carré

Capacité 1 ***Rappels sur la fonction carré***

Soit la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Montrer que $f(1-\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $f(x) = 3 - 2\sqrt{2}$, $f(x) = 0$ et $f(x) = 2\sqrt{2} - 3$.
3. Donner l'allure de la courbe de f.
4. Dresser le tableau de variations et le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de la fonction carré f.

1.2 Fonctions trinômes

Définition 1

Une **fonction polynôme du second degré** (ou fonction trinôme) est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe des constantes a (avec $a \neq 0$), b et c telles que $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$.
Cette forme s'appelle la **forme développée** de la fonction polynôme du second degré f.
Les réels a, b et c sont les **coefficients** de la fonction polynôme du second degré f.
La courbe d'une fonction polynôme du second degré s'appelle une **parabole**.

Capacité 2 ***Identifier les coefficients d'un trinôme***

Reconnaître les fonctions polynômes du second degré et déterminer les coefficients a, b et c de leur forme développée :

- $f : x \mapsto x^2$
- $g : x \mapsto 5x + 3 - x^2$
- $h : x \mapsto (2x-1)(x+3)$
- $j : x \mapsto x^2 - (x-1)^2$
- $k : x \mapsto (1-x)^2 + (x-1)^2$
- $l : x \mapsto (2x+1)^2 - (x-3)^2$

2 Forme canonique et racines d'un trinôme

2.1 De la forme développée à la forme canonique

Propriété 1

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$.
f s'écrit de façon unique sous sa **forme canonique** :

$$\boxed{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$$

La forme canonique est caractérisée par le fait que la variable x n'apparaît qu'une seule fois dans l'expression.
Les coefficients α et β peuvent s'exprimer en fonction des coefficients a, b et c de la forme développée :

- $\boxed{\alpha = -\dfrac{b}{2a}}$ (*formule à retenir*)
- $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ (*formule qui n'est pas à retenir*). On a aussi $\boxed{\beta = f(\alpha)}$ (*à retenir*)

Le signe du nombre $b^2 - 4ac$ va déterminer le nombre de racines de f c'est pourquoi on l'appelle **discriminant** du trinôme et on note :
$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ (*formule à retenir*)

Démonstration Soit x un réel et $f(x) = ax^2 + bx + c$

On fait une factorisation partielle par a (qui est non nul)

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$

On complète en carré remarquable $x^2 + \frac{b}{a}x$

$x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

et donc $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \times \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$

$f(x) = a(x - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

Capacité 3 ***Forme canonique et discriminant***

Pour chacune des fonctions polynômes du second degré ci-dessous, déterminer α, β, la forme canonique et le discriminant Δ.

- $f : x \mapsto x^2 + 16x$
- $g : x \mapsto x^2 - 12x + 5$
- $h : x \mapsto 2x^2 - 12x + 6$

2.2 Racines

Définition 2

Soit f une fonction polynôme du second degré.
Les réels x solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les **racines** de f.
Dans un repère, ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole de f avec l'axe des abscisses.

2.3 Résolution de l'équation générale du second degré

Théorème 1 ***Théorème fondamental***

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Le nombre de racines de f et donc de solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe du discriminant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.
On distingue trois cas :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Racine(s) réelles de f	Pas de racine réelle	Une seule racine réelle : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	Deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$	Pas de factorisation	$f(x) = a(x-x_0)^2$	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

Démonstration

D'après la propriété 1, on a pour tout réel x :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

donc : $f(x)=0$ équivaut à $(x-\alpha)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ (E)

1er cas : $\Delta < 0$

Dans ce cas $\dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$. Comme un carré de nombre réel est toujours positif l'équation (E) n'a pas de solution et donc f n'a pas de racine.

Si f se factorisait en $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ alors f aurait au moins une racine x_1. On aboutirait à une contradiction donc f ne se factorise pas dans ce cas

2ème cas : $\Delta = 0$

$f(x)=0$ équivaut à $(x-\alpha)^2 = 0$

$f(x)=0$ équivaut à $x=\alpha$ (règle du produit nul)

De plus $f(x) = a(x-\alpha)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = a(x-\alpha)^2$ donc f se factorise

3ème cas : $\Delta > 0$

$f(x)=0$ équivaut $\begin{cases} x-\alpha = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x-\alpha = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x = \alpha - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$

De plus $f(x) = a(x-\alpha)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = a\left((x-\alpha)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$

$f(x) = a\left(x - 2 - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - 2 + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ forme factorisée

Capacité 4 *Résoudre une équation du second degré*

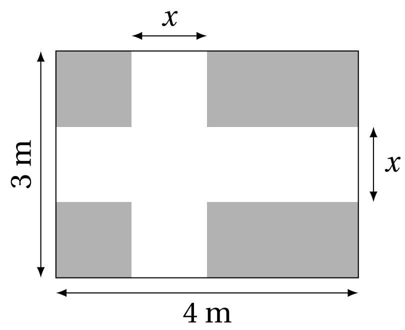
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré suivantes :

a. $2x(x+1) = x^2+3x$
b. $x^2-2x-3=0$
c. $x^2 = x+1$
d. $-(2x)^2-4x=-4$
e. $x^2=4$
f. $3x^2+2x+\frac{1}{3}=0$
g. $2x^2+5=7$
h. $x^2=x-1$
i. $(3x+1)^2=(3-x)^2$
j. $3x^2+1=0$
k. $4x+1=3x^2$

2. Afin de financer la transition énergétique, la taxe sur les carburants vient de subir deux augmentations mensuelles successives de t % où t est un réel positif.

Déterminer la valeur de t arrondie à 0,1 % près, sachant que le taux d'augmentation global de la taxe sur les carburants a été de 60 % en deux mois.

3. Quelle valeur x doit prendre la largeur de la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?



Capacité 5 *Factoriser une fonction polynôme du second degré*

Déterminer les formes factorisées, si c'est possible, des fonctions polynômes du second degré :

- $f : x \longmapsto 3x^2+11x-4$
- $g : x \longmapsto 2x^2+4x-6$
- $h : x \longmapsto 2x^2+5x+6$

Algorithmique 1 *Algorithme de résolution d'une équation du second degré*

1. Compléter cette fonction Python pour qu'elle retourne les racines réelles de $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$.

```
from math import sqrt

def racineTrinome(a, b, c):
    delta = ..........
    if delta > 0:
        x1 = .................
        x2 = ..................
        return (x1, x2)
    elif delta .... 0:
        return ()
    else:
        x0 = ........
        return (x0,)
```

2. Que retourne l'appel de fonction `racineTrinome(1, -5, 6)` ?

3. Corrigé téléchargeable : https://workshop.numworks.com/python/frederic-junier/trinome.

2.4 Liens entre coefficients de la forme développée et racines

Propriété 2

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Si f a deux racines x_1 et x_2 alors la somme S et le produit P des racines sont donnés par :

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

Capacité 6 ***Utiliser les propriétés des racines d'un trinôme***

1. Déterminer une racine évidente de la fonction polynôme du second degré $f : x \mapsto x^2 + 5x - 6$. En déduire une autre racine à l'aide des propriétés des racines puis factoriser $f(x)$.
2. Déterminer une racine évidente de la fonction polynôme du second degré $g : x \mapsto -2x^2 + 5x + 18$. En déduire une autre racine à l'aide des propriétés des racines puis factoriser $g(x)$.

3 Variations et signe d'une fonction polynôme du second degré

3.1 Axe de symétrie d'une parabole

Propriété 3

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ et de forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. On rappelle qu'il existe un unique couple de réels $\boxed{(\alpha ; \beta)}$ tels que pour tout réel x,

   $$\boxed{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta} \quad \text{c'est la **forme canonique** avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

2. Dans un repère du plan, la parabole représentant f a pour **axe de symétrie** la droite d'équation $\boxed{x = \alpha}$ et $(\alpha ; \beta)$ est le couple de coordonnées du **sommet** S de la parabole.

Capacité 7 *Axe de symétrie d'une parabole*

1. Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = x^2$
2. Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = 3 - x^2$
3. Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = (x-3)^2$
4. Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = (x+3)^2$
5. Déterminer l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = -3x^2 - 6x + 1$

3.2 Variations d'une fonction polynôme du second degré

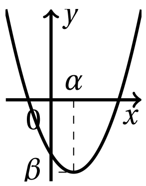
Propriété 4

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) une fonction polynôme du second degré.

Soit $\boxed{(\alpha\,;\beta)}$ les coordonnées du sommet de la parabole représentant f dans un repère avec $\boxed{\alpha = -\dfrac{b}{2a}}$.

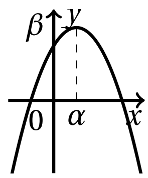
- Si $\boxed{\boldsymbol{a > 0}}$, f est **décroissante** sur $]-\infty\,;\alpha]$ puis **croissante** sur $[\alpha\,;+\infty[$.
- Si $\boxed{\boldsymbol{a < 0}}$, f est **croissante** sur $]-\infty\,;\alpha]$ puis **décroissante** sur $[\alpha\,;+\infty[$.

$\boxed{\boldsymbol{a > 0}}$



x	$-\infty$	$\alpha = \dfrac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f(\alpha)$	↗

$\boxed{\boldsymbol{a < 0}}$



x	$-\infty$	$\alpha = \dfrac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f(\alpha)$	↘

Capacité 8 *Étudier les variations d'un trinôme Partie 1*

1. Démontrer que si une fonction polynôme du second degré a deux racines distinctes x_1 et x_2 alors l'abscisse α du sommet de la parabole est égale à $\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

2. Une fonction trinôme h a pour racines -2 et 3 et le coefficient de x^2 dans sa forme développée est strictement négatif. Déterminer le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

Capacité 9 *Étudier les variations d'un trinôme Partie 2*

Une entreprise produit des panneaux solaires. Une étude de marché permet d'estimer que la production pour le mois à venir est comprise entre 1 500 et 3 000 panneaux solaires. On s'intéresse au bénéfice de l'entreprise sur la vente des panneaux solaires produits.
Pour x centaines de panneaux produits, on note $f(x)$ le bénéfice réalisé, en centaines d'euro.
On décide de modéliser l'évolution du bénéfice de l'entreprise, par :

$$f(x) = -2x^2 + 90x - 400, \quad \text{pour } x \in [15\,;\,30]$$

1. En justifiant, dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[15;30]$.

2. Déterminer le nombre de panneaux solaires qu'il faut vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
   Quelle est alors sa valeur à l'euro près ?

3.3 Fonction dérivée d'une fonction polynôme du second degré

Propriété 5

Soit f une fonction polyôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = 2ax + b$.

Capacité 10 *Utiliser la dérivée d'une fonction polynôme du second degré*

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x^2 + 4x + 1$.

1. Déterminer une expression de la fonction dérivée de g et en déduire une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

2. Déterminer le tableau de variations de g et le comparer avec le tableau de signes de g'. Quelle relation entre les deux peut-on conjecturer ?

3.4 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Propriété 6

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ polynôme du second degré de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta > 0$, en notant x_1 et x_2 les racines de f (avec $x_1 < x_2$), on a :
   - **a.** f est du signe de a « à l'extérieur des racines », sur $]-\infty\,;x_1[\,\cup\,]x_2\,;+\infty[$.
   - **b.** f est du signe contraire de a « à l'intérieur des racines », sur $]x_1\,;x_2[$.
2. Si $\Delta = 0$, en notant x_0 la racine double de f, alors f est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et s'annule uniquement en x_0
3. Si $\Delta < 0$, alors f est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

1) Cas où $\Delta > 0$: $f(x) = ax^2+bx+c$ a deux racines x_1 et x_2 par le théorème fondamental et se factorise en $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ on peut poser $x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0		
$a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	$-$signe de a	0	signe de a	

2) Cas où $\Delta = 0$: $f(x) = a(x-x_0)^2$ Un carré étant toujours positif, $f(x)$ du signe de a et s'annule en a

3) Cas où $\Delta < 0$: $f(x) = a\left((x-\alpha)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$

On a $\Delta < 0$ donc $-\Delta > 0$ donc $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et donc $(x-\alpha)^2 + \left(-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right) > 0$ comme somme de nombres positifs et donc $f(x) = a\left((x-\alpha)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ du signe de a

Capacité 11 ***Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré***

1. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômes du second degré :
   - $f : x \mapsto 2x^2 - 3x - 2$
   - $g : x \mapsto -4x^2 + 2x - 7$
   - $h : x \mapsto \dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{4}$
2. Une entreprise peut produire quotidiennement entre 1 et 20 tonnes de peinture.

   Le coût de production, en millier d'euros, de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;20]$ par $C(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}1x + 2{,}45$. Le prix de vente d'une tonne de peinture est de 670 €. Toute la production est vendue.

   a. Pour x tonnes de peinture produites, déterminer l'expression du bénéfice $B(x)$ réalisé.

b. Déterminer les quantités produites qui permettent de réaliser un bénéfice positif.

Logique 1 *Quantificateurs, contre-exemples et implications*

1. Soit f une fonction polynôme du second degré de discriminant $\Delta < 0$ et dont le coefficient de x^2 est positif.

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est *vraie* ou *fausse* en justifiant.

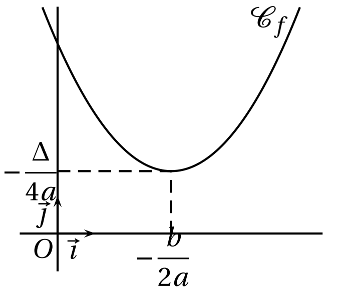
- ☞ Pour tout réel x, on a $f(x) > 0$.
- ☞ Il existe un réel x tel que $f(x) \leqslant 0$.

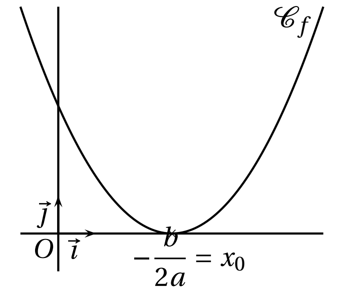
2. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré de discriminant Δ.

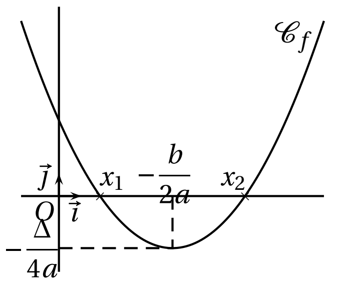
Pour chacune des implications suivantes, déterminer d'abord si elle est *vraie* ou *fausse* en justifiant, puis énoncer sa réciproque et déterminer si elle est *vraie* ou *fausse*.

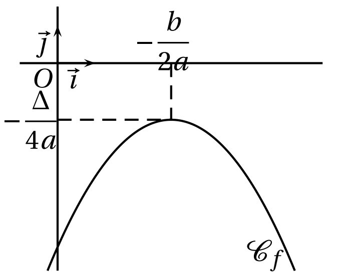
- ☞ Si pour tout réel x on a $f(x) > 0$, alors $\Delta < 0$.
- ☞ Si $ac < 0$ alors $\Delta > 0$.

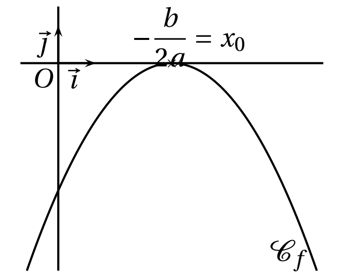
Propriété 7 *Tableau synoptique*

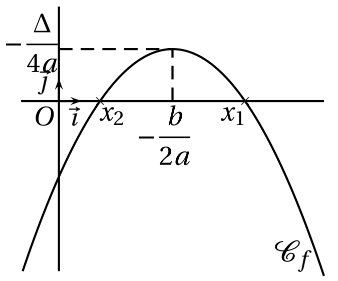
<table>
<tr><th></th><th>$\Delta<0$</th><th>$\Delta=0$</th><th>$\Delta>0$</th></tr>
<tr><td>Racine(s) réelles de f</td><td>Pas de racine réelle</td><td>Une seule racine réelle :
$x_0=-\dfrac{b}{2a}$</td><td>Deux racines réelles distinctes :
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et
$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Factorisation de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$</td><td>Pas de factorisation</td><td>$f(x)=a(x-x_0)^2$</td><td>$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$</td></tr>
<tr><td>Courbe représentative de f et signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ lorsque $a>0$</td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+$</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+$ 0 $+$</td></tr></table></td>
<td>

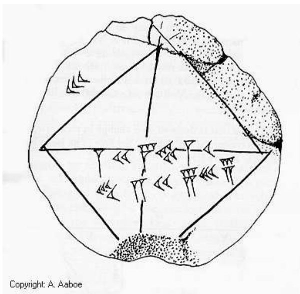
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+$ 0 $-$ 0 $+$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Courbe représentative de f et signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ lorsque $a<0$</td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-$</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-$ 0 $-$</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ x_2 x_1 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-$ 0 $+$ 0 $-$</td></tr></table></td></tr>
</table>

Approximation babylonienne de $\sqrt{2}$.



Source : http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/tablets/YBC7289.html