Histoire 1
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) est un mathématicien et physicien français dont les travaux portèrent dans tous les domaines mathématiques. Il nous a laissé en particulier la notation $f'(x)$ pour la fonction dérivée, la notation indicielle u_n pour les suites et le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction. En arithmétique des entiers, il résolut la difficile équation de Pell $x^2 - ay^2 = \pm 1$ en introduisant les fractions continues. Après avoir succédé à Euler à l'Académie des sciences de Berlin, il siégea dans la commission du système métrique sous la Révolution, il est inhumé au Panthéon.

1 Opérations sur les fonctions dérivables

1.1 Bibliothèques de fonctions dérivables

Propriété 1 ***Dérivées des fonctions usuelles***

Fonction f	Définie sur	Dérivable sur	Fonction dérivée f'
$f : x \longmapsto p$ avec p réel	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \longmapsto 0$
$f : x \longmapsto x$ avec p réel	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \longmapsto 1$
$f : x \longmapsto mx + p$ avec m, p réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \longmapsto m$
$f : x \longmapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \longmapsto 2x$
$f : x \longmapsto x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \longmapsto 3x^2$
$f : x \longmapsto x^n$ avec n entier naturel	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \longmapsto nx^{n-1}$
$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$f' : x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$
$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	$[0\,; +\infty[$	où elle est définie sauf en 0	$f' : x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f : x \longmapsto \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	où elle est définie sauf en 0	$\begin{cases} f'(x) = -1 \text{ si } x < 0 \\ f'(x) = 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Une fonction f définie en a n'est pas forcément dérivable en a, il faut connaître les deux contre-exemples de la fonction racine carrée définie mais pas dérivable en 0 *et de la fonction valeur absolue définie mais pas dérivable en* 0.

1.2 Sommes de fonctions dérivables

Propriété 2

1. Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction somme $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, définie par $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}:\boldsymbol{x}\mapsto \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, est dérivable sur ce même intervalle I.

   Pour tout réel $\boldsymbol{x}$ appartenant à I, on a :

   $$\boxed{(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x})}$$

   La fonction dérivée d'une somme de fonctions dérivables est la somme des fonctions dérivées.

2. Si $\boldsymbol{u}$ est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $\boldsymbol{\lambda}$ est un scalaire c'est-à-dire une constante réelle, alors la fonction $\boldsymbol{\lambda u}$ définie par $\boldsymbol{\lambda u}:\boldsymbol{x}\mapsto \boldsymbol{\lambda u}(\boldsymbol{x})$ est dérivable sur ce même intervalle I.

   Pour tout réel $\boldsymbol{x}$ appartenant à I, on a :

   $$\boxed{(\boldsymbol{\lambda u})'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\lambda u}'(\boldsymbol{x})}$$

   La fonction dérivée d'un produit d'une fonction dérivable $\boldsymbol{u}$ *par une constante multiplicative* $\boldsymbol{\lambda}$ *est* $\boldsymbol{\lambda}$ *fois la dérivée de* $\boldsymbol{u}$.

3. En corollaire des deux propriétés précitées, la fonction $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{x}\mapsto \boldsymbol{x}^{621}-2\boldsymbol{x}^{502}+732\boldsymbol{x}-505$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   Plus généralement, les combinaisons linéaires de fonctions puissances, appelées **fonctions polynômes,** sont dérivables sur tout intervalle où elles sont définies.

Capacité 1 *Déterminer la fonction dérivée d'une somme de fonctions dérivables*

1. Les fonctions polynômes ci-dessous sont dérivables sur $\mathbb{R}$, déterminer leur fonction dérivée.

   a. $f_1 : x \mapsto x^2-621x+622$;

   b. $f_2 : x \mapsto x^3-x^2+x+1$;

   c. $f_3 : x \mapsto x^3+4x^2-2x+1$;

   d. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}-4(x-1)$.

2. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=4\sqrt{x}-\dfrac{5}{x}+x(x-1)$.

   Justifier que g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée.

3. Le coût de production, en centaines d'euros, de x centaines litres d'un produit chimique est modélise par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;25]$ par $C(x)=x^3-30x^2+400x+100$.

   a. Justifier que la fonction C est dérivable sur $[0\,;25]$.

   b. Déterminer sa fonction dérivée C'.

   c. En déduire le coût marginal de production, en euros, de 1 000 litres de produit.

1.3 Produit de fonctions dérivables

Propriété 3

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction produit $x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et pour tout réel x appartenant à I, on a :

$$(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

La fonction dérivée de la fonction produit $u \times v$ vérifie donc la relation suivante :

$$\boxed{(u \times v)' = u' \times v + u \times v'}$$

Attention, la fonction dérivée d'un produit n'est pas le produit des fonctions dérivées.

Démonstration ***détaillée p. 150***

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Capacité 2 ***Déterminer la fonction dérivée d'un produit***

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (6\sqrt{x} - 1)(x^3 + x)$.
On écrit $f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u : x \mapsto 6\sqrt{x} - 1$ et $v : x \mapsto x^3 + x$.

1. Justifier par règles opératoires, la dérivabilité de f sur $]0\,;+\infty[$.
2. Donner les expressions de $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$ et $v'(x)$ puis écrire l'expression de $f'(x)$ en fonction de

$u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$ et $v'(x)$.

3. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f'(x) = 21x^2\sqrt{x} - 3x^2 + 9\sqrt{x} - 1$.

4. Représenter la courbe de f avec sa calculatrice. Quelle conjecture peut-on faire sur la dérivabilité de f en 0 ? Démontrer cette conjecture avec la définition de la dérivabilité en un point.

1.4 Inverse d'une fonction dérivable

Propriété 4 ***admise***

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I qui ne s'annule pas sur I alors l'inverse de la fonction u $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel x appartenant à I, on a :

$$\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

La fonction dérivée de l'inverse $\dfrac{1}{u}$ vérifie donc la relation suivante :

$$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$$

Attention, la fonction dérivée de l'inverse d'une fonction n'est pas l'inverse de sa dérivée.

Capacité 3 ***Déterminer la fonction dérivée d'un inverse***

f est la fonction d'expression $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 1}$. On écrit $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

1. Déterminer les racines x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$, de la fonction polynôme du second degré u.

2. Justifier que $f = \dfrac{1}{u}$ est dérivable sur $]x_1\,;\,x_2[$.

3. Pour tout réel $x \in]x_1\,;\,x_2[$, donner les expressions de $u(x)$ et $u'(x)$ puis exprimer $f'(x)$ en fonction de $u(x)$ et $u'(x)$.

1.5 Quotient de fonctions dérivables

Propriété 5 ***admise***

Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, telle que $\boldsymbol{u}$ ne s'annule pas sur I, alors la fonction quotient $\boldsymbol{x} \mapsto \dfrac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})}$ est dérivable sur I et pour tout réel $\boldsymbol{x}$ appartenant à I, on a :

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)'(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{v}^2(\boldsymbol{x})}$$

La fonction dérivée de la fonction quotient $\dfrac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}$ vérifie donc la relation suivante :

$$\boxed{\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2}}$$

Attention, la fonction dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des fonctions dérivées.

Capacité 4 ***Déterminer la fonction dérivée d'un quotient***

On considère la fonction $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}-\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{x^{633}-622}{1-x} \end{array}$.

On considère également les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u : x \mapsto x^{633} - 622$ et $v : x \mapsto 1 - x$.

1. Justifier que $f = \dfrac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$?
2. Soit x un réel différent de 1, déterminer une expression simplifiée de $f'(x)$ (développer et réduire le numérateur).

1.6 Dérivée de la composée avec une fonction affine

Propriété 6

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{x} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\boldsymbol{f}"] & \boldsymbol{mx+p} \arrow[r] & \boldsymbol{g(mx+p)} \end{tikzcd}$$

Soit $\boldsymbol{g}$ une fonction dérivable sur un intervalle I et si J est un intervalle tel que, pour tout réel $\boldsymbol{x}$ de J, $\boldsymbol{mx+p}$ appartient à J, avec $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{p}$ des constantes réelles, alors la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur I par $\boldsymbol{f(x) = g(mx+p)}$ est dérivable sur J.

De plus, pour tout réel x appartenant à J, on a $\boxed{f'(x) = m \times g'(mx+p)}$.

Capacité 5 ***Déterminer la fonction dérivée d'une composée***

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (634x - 632)^{733}$.

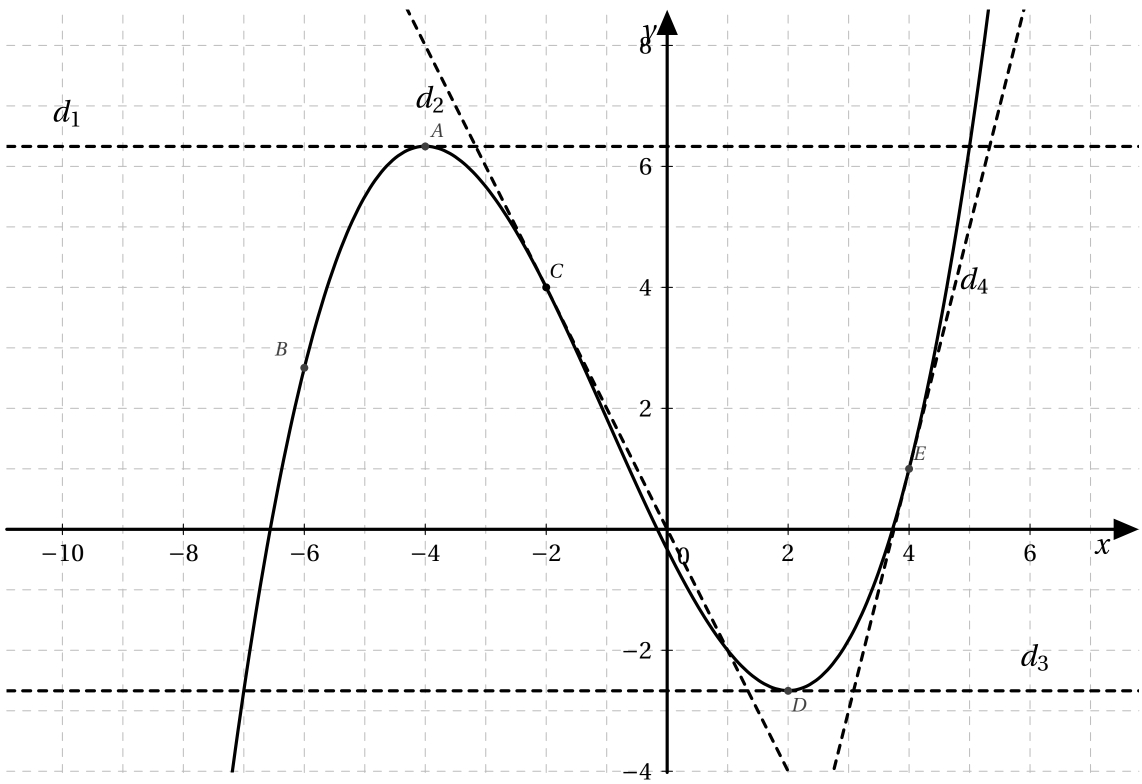
1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $g'(x)$ pour tout réel x.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.

2 Lien entre signe de la dérivée et sens de variation

2.1 Du sens de variation de la fonction au signe de sa dérivée

Activité 1

Sur la figure ci-dessous, C_f est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont tangentes à la courbe C_f respectivement en A, C, D et E.



Répondre aux questions par lecture graphique.

1. La tangente à la courbe C_f au point C d'abscisse -2 passe par l'origine du repère.

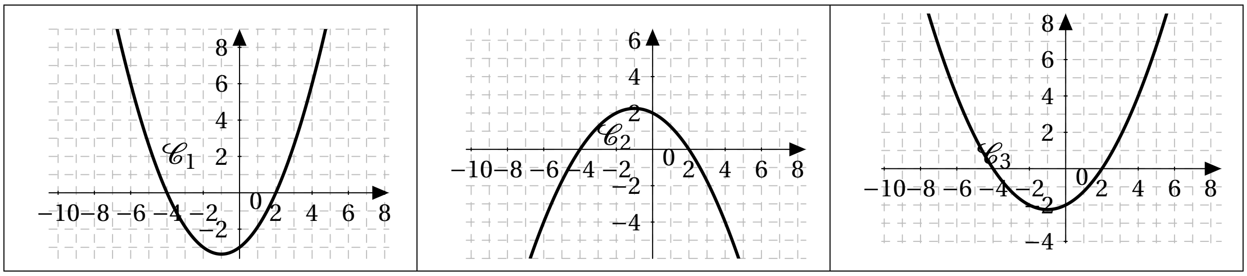
Déterminer $f'(-2)$ puis l'équation de la tangente d_2.

2. La tangente à la courbe C_f au point E d'abscisse 4 passe par le point de coordonnées $(3\,;-3)$.
   Déterminer $f'(4)$ puis l'équation de la tangente d_4.

3. On admet que f est croissante sur $]-\infty\,;-4]$ et sur $[2\,;+\infty[$. Dresser le tableau de variations de f.

4. Quel est le signe de $f'(0)$? et celui du coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B ?
   Conjecturer le signe de la fonction dérivée f' sur $]-\infty\,;-4]$.

5. Parmi les trois courbes ci-dessous, déterminer celle qui représente f'. Justifier.



Théorème 1 ***admis***

Soit f une fonction monotone et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Compléter par $\leqslant$, $=$ *ou* $\geqslant$.

- Si f est croissante sur I alors pour tout $x \in$ I on a $f'(x) \cdots 0$.
- Si f est décroissante sur I alors pour tout $x \in$ I on a $f'(x) \cdots 0$.

2.2 Du signe de la dérivée au sens de variation de la fonction

Théorème 2 ***admis, réciproque du précédent***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Compléter par $\leqslant$, $=$ *ou* $\geqslant$.

- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) \cdots 0$ alors alors f est croissante sur I.
- Si pour tout réel x de I on a $f'(x) \cdots 0$ alors alors f est décroissante sur I.

Capacité 6 ***Exploiter le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction, voir exercices 25 p.162 et 20 p.161***

Soit f une fonction dérivable sur $[-4\,;6]$ dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	-4	-3	0	5	6
$f(x)$	-2 ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-4

1. Dresser le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f sur l'intervalle $[-4;6]$.
2. Dresser le tableau de variations d'une fonction F dérivable sur l'intervalle $[-4;6]$ et dont la dérivée est f.

2.3 Caractérisation des fonctions constantes

Propriété 7

f est constante sur I si et seulement si f est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

3 Applications

3.1 Études des variations d'une fonction

Méthode

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour étudier les variations de f sur I, on procède ainsi :

- On calcule l'expression de $f'(x)$ et on la factorise.
- On étudie le signe de $f'(x)$ dans un tableau.
- Dans le tableau en dessous du bilan de signe de $f'(x)$, on rajoute une ligne avec les variations de f.

Capacité 7 ***Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré***

1. Soit la fonction g polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Déterminer l'expression de sa fonction dérivée g', étudier le signe de g' et en déduire les variations de g.
2. Soit une f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.

   a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $f'(x)$ en fonction de a et b.

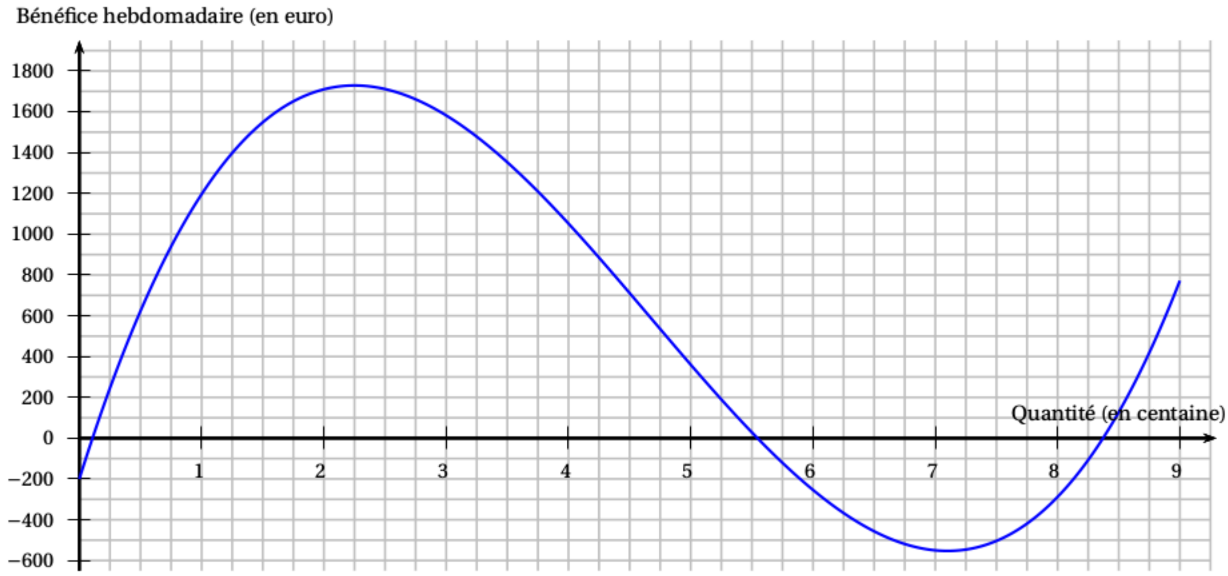
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x en distinguant les cas $a > 0$ et $a < 0$.
   Dans chaque cas préciser la valeur de x où f atteint un maximum ou un minimum global.

Algorithmique 1 *Étude des variations et recherche de racine par dichotomie*

Une entreprise fabrique et vend des brosses à dents connectées. On modélise le bénéfice en euro pour x centaines de brosses à dents fabriquées et vendues par semaine par la fonction B définie sur $[0;9]$ par :

$$B(x) = 40x^3 - 561x^2 + 1\,917x - 200$$

La courbe représentative du bénéfice hebdomadaire est donnée ci-dessous.



1. Justifier que la fonction B est dérivable sur $[0;9]$ et déterminer l'expression de $B'(x)$.
2. En déduire l'étude des variations de la fonction B sur l'intervalle $[0;9]$.
3. On admet que l'équation $B(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[8;8,5]$.

   a. Déterminer graphiquement une valeur approchée de α à 25 unités près.
   b. Déterminer un encadrement de α à l'unité près par balayage avec la calculatrice.

4. Compléter le programme `Python` ci-dessous pour qu'en sortie de boucle, l'intervalle `[u , v]` constitue un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 0,02.

```
def B(x):
    return 40 * x ** 3 - 561 * x ** 2 + 1917 * x - 200

u = 8
v = 8.5
while v - u > 0.02:
    m = (u + v) / 2
    if B(m) >= 0:
        .... = m
    else:
        .... = m
```

5. Exécuter ce programme en complétant le tableau ci-dessous.

   Chaque exécution du corps de la boucle Tant Que constitue une étape où l'état des variables est relevé à la fin de l'itération, après l'exécution de l'instruction conditionnelle. Pour u et v il s'agit donc des valeurs en sortie de boucle et non des valeurs en entrée de boucle. Il n'est pas forcément nécessaire d'utiliser toutes les colonnes. Noter les valeurs exactes.

	étape 0	étape 1	étape 2	étape 3	...	...	...	...
m	$\emptyset$	$8,25$						
u	8	$8,25$						
v	$8,5$	$8,5$						
$v-u$	$0,5$	$0,25$						

6. En déduire une approximation à l'unité près du nombre minimal de brosses à dents connectés que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice, si sa production hebdomadaire est comprise entre 800 et 850 unités.

3.2 Extremums d'une fonction et problèmes d'optimisation

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f admet un **maximum local** en a s'il existe un intervalle J inclus dans I et contenant a, tel que pour tout $x \in \text{J}$, $f(x) \leqslant f(a)$.

  f admet un **maximum global** en a si pour tout $x \in \text{I}$, $f(x) \leqslant f(a)$.

- f admet un **minimum local** en a s'il existe un intervalle J inclus dans I et contenant a, tel que pour tout $x \in \text{J}$, $f(x) \geqslant f(a)$.

  f admet un **minimum global** en a si pour tout $x \in \text{I}$, $f(x) \geqslant f(a)$.

Propriété 8 ***Condition nécessaire d'extremum local***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel qui n'est pas l'une des bornes de I.
Si f atteint un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Démonstration ***guidée page 151***

....

....

....

....

....

....

Logique 1

1. Soit la fonction $f : x \mapsto x^3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a. Étudier le signe de f' et les variations de f.

   b. Que peut-on dire de la réciproque de la propriété précédente ?

2. Donner un exemple de fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,10]$ qui atteint son maximum en 0 et telle que $f'(0) \neq 0$.

3.3 Démontrer une inégalité, étudier la position relative de deux courbes

Méthode

Soit f et g des fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et soit k un réel.

- ☞ Pour démontrer l'inégalité « $\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant k$ », on peut étudier les variations de f sur I et démontrer que le maximum global de f sur I est inférieur ou égal à k.
- ☞ Étudier les positions relatives des courbes de g et de g équivaut à étudier le signe de $f(x) - g(x)$ et on peut le faire en étudiant les variations de $f - g$ puis en utilisant les racines de $f - g$ pour délimiter les intervalles où le signe de $f - g$ change.

Capacité 8 *Exploiter les variations d'une fonction pour démontrer une inégalité*

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
On veut déterminer si l'inégalité (I) est vraie : « (I) : $\forall x>0,\ f(x)>1,5$ ».

1. Représenter la courbe de f sur sa calculatrice. Quelle conjecture peut-on faire sur la validité de l'inégalité (I) ?
2. **a.** Justifier que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et démontrer que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$.

   b. Étudier les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

   c. Conclure sur la validité de l'inégalité (I).

Capacité 9 *Étudier la position relative de deux courbes*

Soit les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=\dfrac{2}{x}$.

1. Représenter les courbes de f et g avec sa calculatrice. Quelle conjecture peut-on faire sur les positions relatives des deux courbes ?
2. **a.** Démontrer que pour tout réel $x>0$, on a $f(x)-g(x)=\dfrac{x^3+x-2}{x}$.

   b. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=x^3+x-2$.

   c. Calculer $h(1)$ et en déduire le signe de $f(x)-g(x)$ selon les valeurs de x dans $]0\,;+\infty[$.