Histoire 1

- Archimède calculait dès l'Antiquité des aires par décomposition d'une surface en une infinité de segments de droites, mais les mathématiciens sont gênés par ces calculs sur des *infinitésimaux* ou *indivisibles* : en ajoutant des lignes unidimensionnelles, sans largeur, on obtient des aires à deux dimensions.

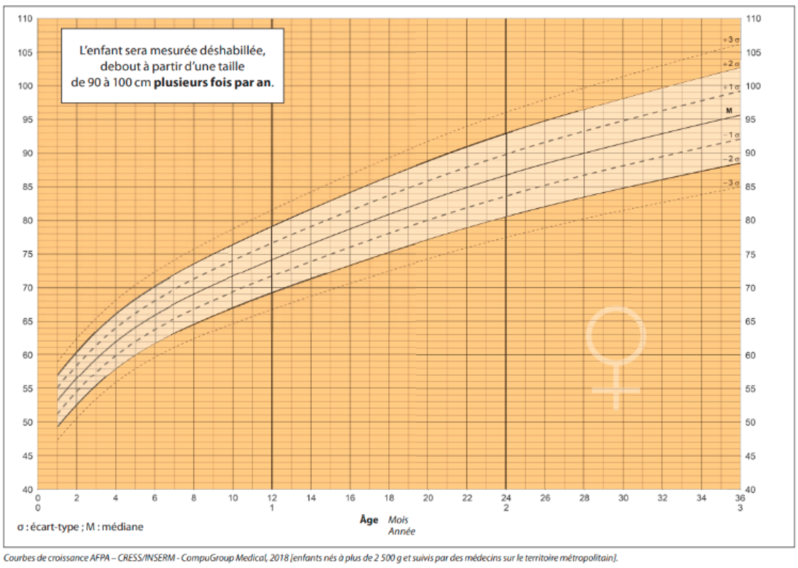
- Isaac Newton (1642-1727) est un mathématicien et physicien anglais, père de la physique moderne et découvreur de la gravitation universelle dans son fameux *Principia* de 1687. En 1669 il écrit le *De analysi*, premier exposé rigoureux de *calcul infinitésimal*, basé sur le passage à la limite dans des séries infinies, où il définit les dérivées comme des *fluxions* (quantités changeant avec le temps) et établit la détermination de l'aire délimitée par une courbe comme le processus inverse de la détermination d'une tangente à cette courbe.

- Gottfried Leibniz (1646-1716) est un philosophe, physicien et mathématicien allemand considéré comme l'un des derniers universalistes. En 1686 il publie un traité de *calcul différentiel* où il présente des résultats équivalents à ceux de Newton. Une grave querelle oppose les sociétés scientifiques allemandes et anglaises sur la paternité du calcul différentiel car Newton n'a publié son *De analysi* qu'en 1711. Les notations de Leibniz pour la différentiation et l'intégration, plus pratiques, ne se sont imposées en Angleterre qu'au début du XIX^e^ siècle.

1 Activité d'introduction

Activité 1

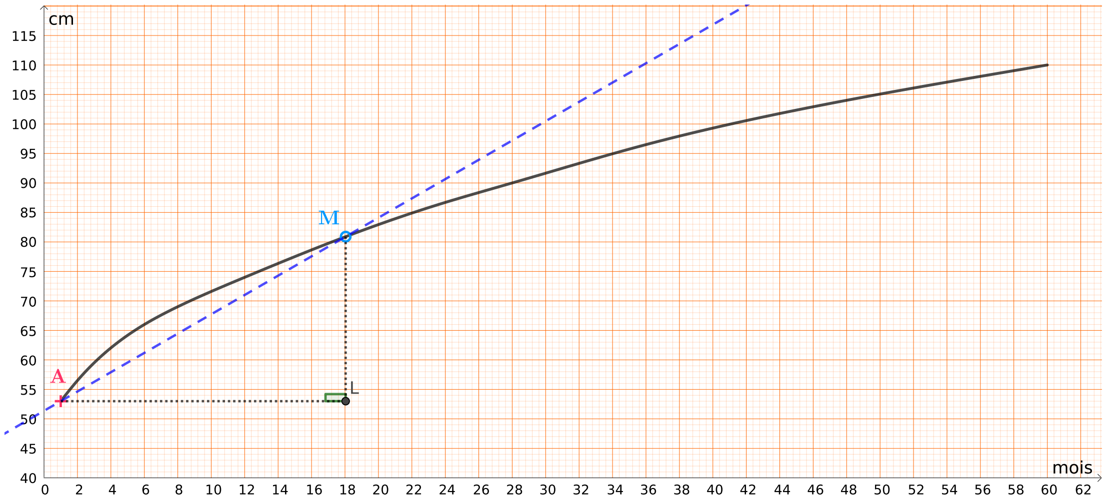
Adaptation d'une activité Geogebra conçue par Vincent Pantaloni.



Graphique 1

Le graphique précédent est issu d'un carnet de santé, il montre des courbes de croissance de la taille des filles de 1 mois à 3 ans. On considère dans la suite la courbe centrale qui correspond à la croissance médiane (en chaque point, 50 % des filles ont une taille plus grande et 50 % une taille plus petite).
Source : `https://solidarites-sante.gouv.fr/IMG/pdf/carnet_de_sante-num-.pdf`

On considère la courbe médiane représentée ci-dessous.



Graphique 2

Partie 1 : zoom sur la courbe

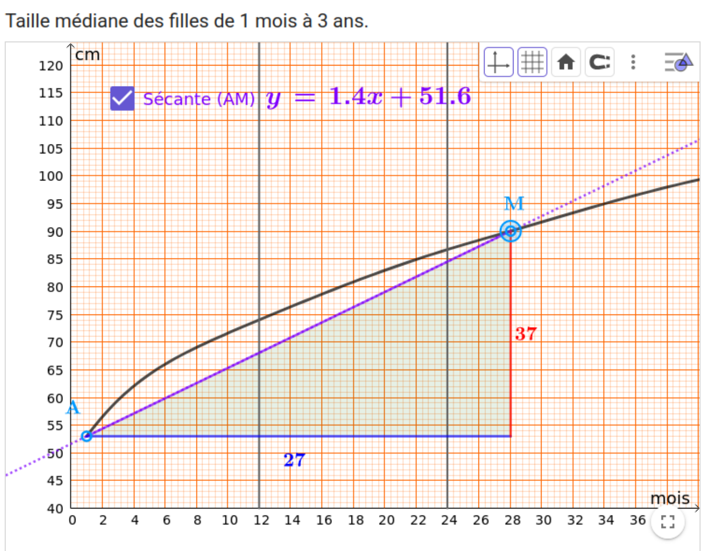
A la maison ouvrez l'activité Geogebra https://www.geogebra.org/m/ejybzqtk; en classe, observez l'exemple donné par le professeur au tableau.

1. Effectuez plusieurs fois la séquence suivante :

- *Déplacez le point A où vous voulez sur la courbe.*
- *Zoomez sur la courbe avec le bouton Toolbar Image*
- *Revenez au cadrage initial, recommencez avec une autre position du point A.*

Que remarquez-vous ?

Partie 2 : entre 1 et 28 mois



Graphique 3

Dans cette partie, on considère le *Graphique 3*.
La taille médiane à 1 mois est l'ordonnée du point A de la courbe d'abscisse 1 et la taille médiane à 28 mois est celle du point M d'abscisse 28.

1. Entre 1 an et 28 mois, de combien de cm cette fille a-t-elle grandi ?
2. Quel est le coefficient directeur (ou pente) de la sécante (AM) à la courbe ?
3. Quelle serait l'unité de ce coefficient directeur ?
4. Que représente ce coefficient directeur en termes de vitesse de croissance ?

Partie 3 : à l'âge de 1 mois

À 24 mois la taille médiane d'une fille est de $86,7$ cm.
À 1 mois, la taille médiane d'une fille est de 53 cm.

1. Quelle a été la vitesse moyenne de croissance de cette jeune fille entre 1 mois et 24 mois ?
2. Recopiez et complétez le tableau ci-dessous :

Âge	Taille	Vitesse moyenne de croissance depuis l'âge de 1 mois
18	80,9	...
4	62,1	...
2	56,4	...
1,4	54,3	...
1,1	53,35	...

3. À l'âge de 1 mois, quelle est la vitesse de croissance de cette fille ? Comment le savoir ? Proposez une méthode.

   On parle alors de *vitesse instantanée* de croissance de la taille à l'âge de 1 mois.
4. Comment tracer la droite passant par le point $A(1,53)$ et de coefficient directeur la *vitesse instantanée* de croissance de la taille à l'âge de 1 mois estimée à la question précédente ? Cette droite est la *tangente* à la courbe au point A. Déterminez une équation de cette tangente.

Partie 4 : vitesse instantanée

A la maison ouvrez l'activité Geogebra https://www.geogebra.org/m/ejybzqtk ; en classe, observez l'exemple donné par le professeur au tableau.

1. Effectuez plusieurs fois la séquence suivante :

   - *Choisissez un point A ;*
   - *Tracez la tangente et la sécante (AM) ;*
   - *Déplacez M pour le faire se rapprocher de A ;*
   - *Comparez les équations de ces deux droites ;*

- *Recommencez au premier point avec une autre position du point A.*

Complétez le tableau suivant :

Âge	Vitesse instantanée de croissance de la taille	Point de la courbe	Équation de la tangente
...	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...

Partie 5 : tangente et approximation locale

1. *Approximation locale.*

   À la maison ouvrez l'activité Geogebra https://www.geogebra.org/m/ejybzqtk à la section *Zoom sur la tangente*; en classe, observez l'exemple donné par le professeur au tableau.

   En cliquant sur le bouton avec la loupe Toolbar Image on peut zoomer autour d'un point A avec un facteur 2 à chaque fois. Faire des essais avec plusieurs positions du point A. Si on effectue un zoom assez important, qu'observe-t-on entre la courbe et la tangente ?

2. *Extrapolation.*

   a. Quelle est la vitesse instantanée de croissance en cm/mois à l'âge d'un an ?

   b. Quelle taille mesurerait une fille à l'âge de 12 ans si sa croissance gardait la même vitesse à partir de l'âge d'un an ?

   c. Comment serait la courbe de taille en fonction de l'âge si la vitesse instantanée de croissance de la taille était constante ?

2 Point de vue local, fonction dérivable en un point

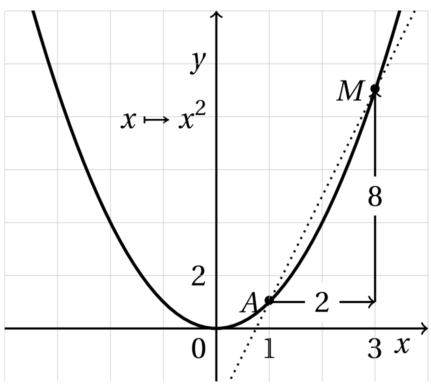
2.1 Taux de variation

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a et x deux réels distinctes appartenant à I.
Le **taux de variation** de f entre a et x est le quotient :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

C'est le coefficient directeur de la droite sécante à $\mathscr{C}_f$ passant par les points $A(a;f(a))$ et $M(x;f(x))$.
Pour exprimer le taux de variation d'une quantité y par rapport à une quantité x, on peut utiliser la notation $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.



Corollaire

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, si on considère h l'écart non nul entre a et x, le taux de variation de f entre a et $x = a + h$ appartenant à I est le quotient :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Capacité 1 ***Identifier un taux de variation***

Donnez des exemples de taux de variations calculés dans l'activité d'introduction.
Comment les a-t-on interprétés ?

Capacité 2 ***Calculer un taux de variation***

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[0;20]$ par $C(x) = 2 + x^2$.
Soit h un réel différent de 0 et tel que $1 + h \geqslant 0$.
Recopiez et complétez le tableau ci-dessous :

a	x	Taux de variation de C entre a et x
1	2	...
1	$1,5$	...
1	$1 + h$ avec $h \neq 0$ et $h > -1$	...

2.2 Nombre dérivé en un point d'une fonction

Histoire 2

Que sont ces fluxions ? Les vitesses d'incréments évanouissants, et que sont ces mêmes incréments évanouissants ? Ce ne sont ni des quantités infinies, ni des quantités infiniment petites, ni pourtant rien. Ne pouvons-nous les appeler les fantômes des quantités défuntes ?

Berkeley, *L'Analyste*, 1734, pamphlet contre le calcul différentiel

Définition 2

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur un intervalle I, et soit $\boldsymbol{a}$ un réel appartenant à I.

f est dérivable en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, le taux de variation de f entre a et x se rapproche de plus en plus d'un certain nombre lorsque x se rapproche de plus en plus de a sans jamais être égal à a.

Ce nombre est le **nombre dérivé** ou **dérivée** de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$, on le note $\boxed{\boldsymbol{f'(a)}}$.

C'est la **limite** de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{a}$ et on note : $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)}$.

Corollaire

On reprend les hypothèses du théorème et on note $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$ l'écart entre $\boldsymbol{a}$ fixé dans I et $\boldsymbol{x}$ distinct de $\boldsymbol{a}$ et mobile dans $\boldsymbol{I}$.

f est dérivable en a si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, le taux de variation de f entre a et $a+h$, tend vers un nombre lorsque h tend vers 0.

Ce nombre est le **nombre dérivé** ou **dérivée** de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$, il est noté $\boxed{\boldsymbol{f'(a)}}$.

C'est la **limite** de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque $\boldsymbol{h}$ tend vers $\boldsymbol{0}$ et on note : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)}$.

Remarque 1

- Les notations de Newton se sont imposées mais la notation de Leibniz reste très utilisée en Physique. Leibniz définissait la dérivée d'une fonction f en a comme la limite du quotient d'une variation infinitésimale de $y=f(x)$ par rapport à une variation infinitésimale de x qui tend vers 0, notée $\lim\limits_{\Delta(x)\to 0}\dfrac{\Delta(y)}{\Delta(x)}$ et il exprimait cette dérivée avec des d droits : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ pour la dérivée de f par rapport à x et $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ pour le nombre dérivé de f en a.
- Si un coût de production est modélisé par une fonction $C : q \mapsto C(q)$, alors le taux de variation $C_M(a)=(C(a+1)-C(a))/1$ représente le coût de production d'une unité supplémentaire pour a unités déjà produites. Pour une production continue (en litres ...), si C est dérivable en a alors on peut prendre la dérivée $C'(a)$ comme approximation du **coût marginal** en a, qu'on interprète comme le taux de variation instantané du coût de production. Un profit n'est réalisé que si le coût marginal est inférieur au prix de vente, un profit est optimal si le prix de vente est égal au coût marginal.
- Si la loi horaire d'un mobile est modélisée par une fonction $d : t \mapsto d(t)$, la vitesse moyenne du mobile entre les instants t et $t+h$ est donnée par le taux de variation $\dfrac{d(t+h)-d(t)}{h}$. Si d est dérivable en a, $d'(a)$ s'interprète comme la **vitesse instantanée** du mobile à l'instant a.
- En résumé, voici les interprétations classiques de la dérivée.

Domaine	*Fonction*	*Variable*	*Image*	*Unité du nombre dérivée*	*Interprétation*
Cinématique	Loi horaire d	Temps t	Distance $d(t)$	m/s	Vitesse instantanée
Économie	Coût C	Quantité q	Coût $C(q)$	euro/unité produite	Coût marginal

Capacité 3 ***Conjecturer un nombre dérivé***

On donne ci-dessous un programme Python :

```python
from math import sqrt

def f(x):
    return sqrt(2 * x + 3)

def taux_variation(f, a, n):
    pas = 1 / n
    x = a - 5 * pas
    for i in range(10):
        if i != 5:
            print(x, (f(x) - f(a))/ (x - a))
        x  = x + pas
```

Voici deux évaluations de la fonction `taux_variation` :

```
>>> taux_variation(f, 3, 1000)
2.995 0.333425977401987
2.996 0.3334074403474882
2.997 0.3333889074150649
2.9979999999999998 0.33337037860322205
2.9989999999999997 0.3333518539098132
3.0009999999999994 0.3333148168722282
3.0019999999999993 0.3332963045244993
3.0029999999999992 0.33327779628864185
3.003999999999999 0.33325929216284234
>>> taux_variation(f, 3, 100000)
2.99995 0.3333342592622965
2.99996 0.333334074077836l
2.9999700000000002 0.33333388889386917
2.9999800000000003 0.3333337036889314
2.9999900000000004 0.3333335185333368
3.0000100000000005 0.33333314813332987
3.0000200000000006 0.3333329629777353
3.0000300000000006 0.3333327777727975
3.0000400000000007 0.3333325925888306
```

1. Donnez une expression de la fonction f dont on calcule les taux de variation et précisez son ensemble de définition.

2. Que fait `taux_variation(f, 3, 1000)` ?

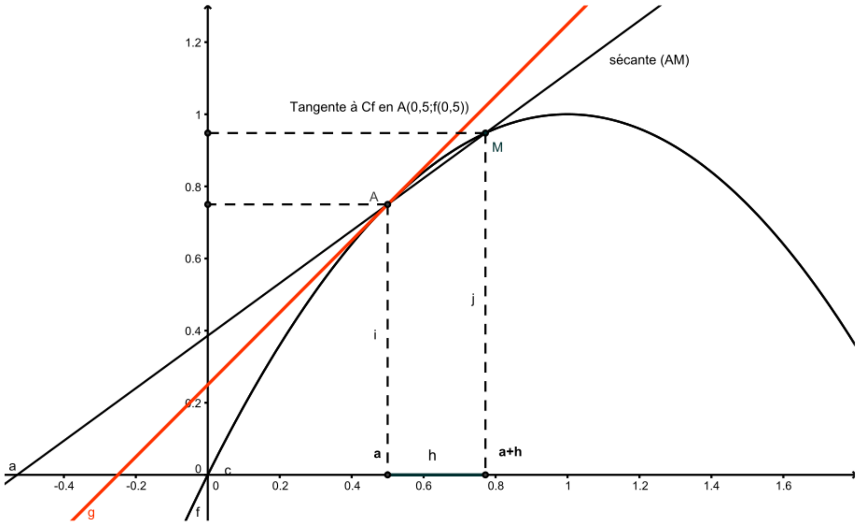
3. Quel est le rôle du test `if i != 5`?

4. Quelle conjecture peut-on faire sur la dérivabilité de la fonction f en 3 ?

Capacité 4 *Déterminer un nombre dérivé à partir de la définition*

1. On lance un caillou du haut d'un point. La distance parcourue par le caillou au bout de t secondes avant de toucher le sol est $d(t) = 4,9t^2$.
   - **a.** Exprimer le taux de variation de la fonction d entre 2 et $2+h$ où $h \neq 0$ et $h > -2$.
   - **b.** Déterminer la vitesse instantanée du caillou au bout de 2 secondes.
2. On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
   - **a.** Démontrer que pour tout réel h tel que $h \neq 0$ et $h > -3$, on a $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = -\dfrac{1}{3(3+h)}$.
   - **b.** La fonction f est-elle dérivable en 3 ?
3. Soit la fonction $f : x \mapsto 2x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
   - **a.** Démontrer que pour tout réel a et pour tout réel $h \neq 0$, le taux de variation de f entre a et $a+h$ est égal à 2.
   - **b.** En déduire que la fonction f est dérivable en tout réel a.

2.3 Tangente à la courbe d'une fonction dérivable



Tangente en $A(0,5\,;f(0,5))$ *à la courbe de la fonction* $f : x \mapsto -x^2 + 2x$

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit a un réel appartenant à I et h un réel non nul tel que $a+h$ appartient à I.
On considère les points $A(a\,;f(a))$ et $M_h(a+h\,;f(a+h))$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan.
Si f **est dérivable en** a, lorsque h tend vers 0, les sécantes (AM_h) à $\mathscr{C}_f$ tendent vers une position limite qui est la droite passant par le point A$(a\,;f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Cette droite, « **limite des sécantes** », est appelée **tangente à $\mathscr{C}_f$ en A**$\left(a\,;\,f(a)\right)$.

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable en a, une équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$\boxed{\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}}$$

Démonstration *voir page 119*

....

....

....

....

....

....

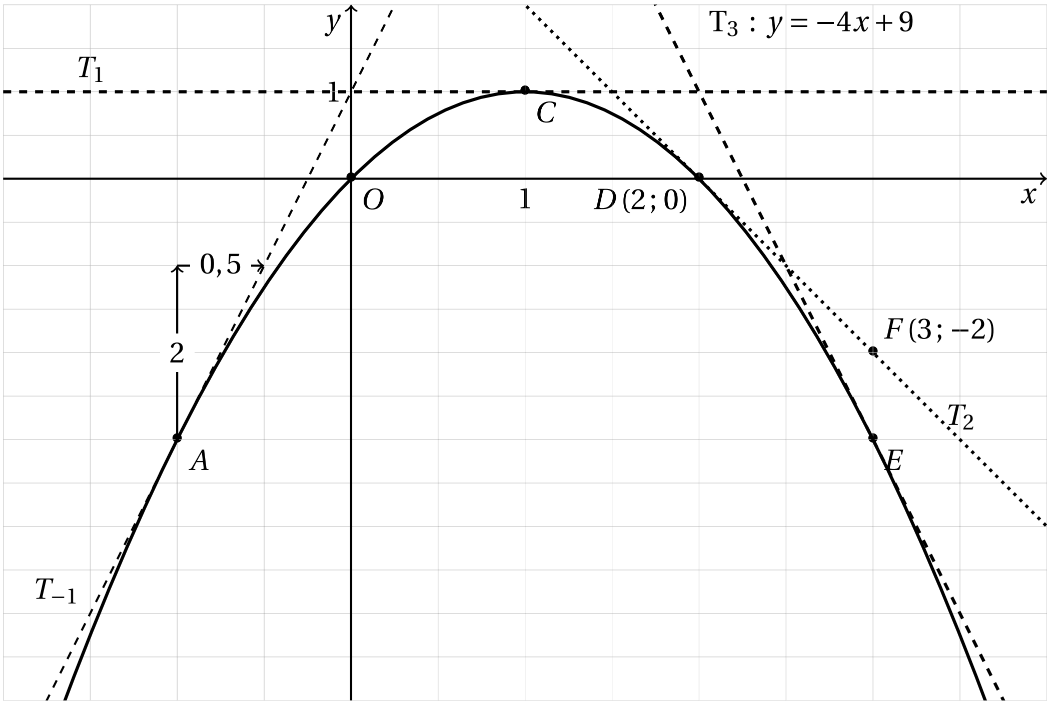
....

Capacité 5 *Déterminer une équation de tangente à partir de la formule*

On considère une fonction f définie et dérivable en tout réel a.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

1. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est $y = -3x + 4$.
   Déterminer les valeurs de $f(2)$ et $f'(2)$.
2. On a $f(-3) = 9$ et $f'(-3) = 4$. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.

Capacité 6 ***Déterminer graphiquement un nombre dérivé et une équation de tangente***



Sur le graphique précédent, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-2;4]$ par $f(x) = -x^2 + 2x$.
On admet que f est dérivable en -1, 0, 1, 2 et 3 et on a tracé les tangentes à $\mathscr{C}_f$:

- T_1 au point $C(1;1)$;
- T_2 au point $D(2;0)$;
- T_{-1} au point $A(-1;-3)$;
- T_3 au point $E(3;-3)$;

1. Avec les éléments présents sur le graphique, déterminer les nombres dérivés $f'(1)$, $f'(-1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$ puis les équations réduites des tangentes T_1, T_{-1}, T_2 et T_3.
2. Soit h un réel non nul, vérifier que $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = -h+2$, faire tendre h vers 0 et en déduire le nombre dérivé de f en 0.
3. Représenter graphiquement la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point $O(0;0)$ et déterminer son équation réduite.

Capacité 7 ***Tangente à une droite***

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$. Dans la capacité 2, on a démontré que pour tout réel a, f est dérivable en a et que $f'(a) = 2$.

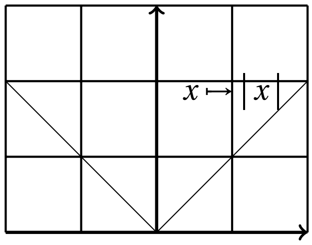
1. Pour tout réel a, déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe de f dans un repère du plan.
2. Ce résultat vous surprend-il ?

2.4 Dérivabilité des fonctions valeur absolue et racine carré

Propriété 2

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}}$$



Pour tout réel x, la valeur absolue de x est notée $|x|$.

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Démonstration

....

....

....

....

....

....

Algorithmique 1

1. Démontrer que pour tout réel $h \geqslant -4$, on a $\dfrac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}}$.

   Faire tendre h vers 0 et en déduire que la fonction racine carrée est dérivable en 5.

2. Compléter le programme `Python` ci-dessous pour qu'il affiche les taux de variation de la fonction racine carrée entre $0+h$ et 0 pour h prenant des valeurs 10^{-k} avec k variant entre 1 et 9 :

```
from math import sqrt

for k in range(1 , 10):
    h = 10 ** -k
    print("h=", h, "taux(h)=", ................................)
```

3. Après exécution, on obtient ces résultats :

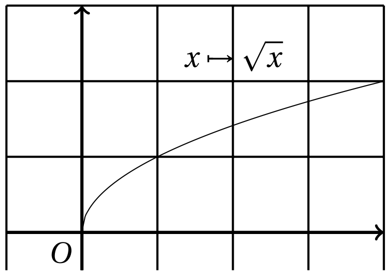
```
h= 0.1 taux(h)= 3.1622776601683795
h= 0.01 taux(h)= 10.0
.................................
h= 1e-08 taux(h)= 10000.0
```

```
h= 1e-09 taux(h)= 31622.776601683792
```

Quelle conjecture peut-on faire sur la dérivabilité de la fonction racine carrée en 0 ?

Propriété 3

Pour tout réel $x \geqslant 0$, la racine carré de x est l'unique réel positif noté $\sqrt{x}$ tel que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
La fonction racine carré est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.



....

Démonstration *détaillée p. 118*

....
....
....
....
....
....

3 Point de vue global

3.1 Fonction dérivable sur un intervalle

Définition 4

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en tout point a de I, on dit que f est dérivable sur I, et on appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction f' définie par :

$$\boxed{f' : a \mapsto f'(a)}$$

Capacité 8 ***Déterminer la fonction dérivée d'une fonction usuelle avec la définition***

Soit la fonction $f : x \mapsto 734x + 505$ définie sur $\mathbb{R}$. Fixons un réel a quelconque.

1. Soit $h \neq 0$, vérifier que le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est égal à $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 734$.
2. Le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a-t-il une limite finie quand h tend vers 0 ?
3. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Si oui, quelle est sa fonction dérivée ?

3.2 Dérivabilité des fonctions affines et puissances

Propriété 4 ***Admise pour les fonctions*** $x \mapsto x^3$ ***et*** $x \mapsto x^n$

Les fonctions affines et puissances sont dérivables sur leurs intervalles de définition.
En particulier si elles sont définies sur $\mathbb{R}$, alors elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f : x \mapsto p$ avec p réel	$f' : x \mapsto \ldots\ldots$
$f : x \mapsto x$	$f' : x \mapsto \ldots\ldots$
$f : x \mapsto mx + p$ avec m, p réels	$f' : x \mapsto \ldots\ldots$
$f : x \mapsto x^2$	$f' : x \mapsto \ldots\ldots$
$f : x \mapsto x^3$	$f' : x \mapsto \ldots\ldots$
$f : x \mapsto x^n$ avec n entier naturel	$f' : x \mapsto \ldots\ldots$

Démonstration ***voir exo 1 p. 147 pour la fonction carré***

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Capacité 9 ***Déterminer la fonction dérivée d'une fonction usuelle***

Pour chaque fonction, définie sur $\mathbb{R}$, déterminer sa fonction dérivée et des équations des tangentes à sa courbe aux points d'abscisses -1 et 1.

1. $f : x \mapsto 502$
2. $g : x \mapsto 502x$
3. $h : x \mapsto 502 - x$
4. $j : x \mapsto x^2$
5. $k : x \mapsto x^3$
6. $m : x \mapsto x^{621}$

3.3 Dérivabilité de la fonction inverse

Propriété 5

La fonction inverse $\boldsymbol{f : x \mapsto \frac{1}{x}}$ est dérivable sur ses intervalles de définition. En particulier, si elle est définie sur $]-\infty\,;\,\mathbf{0}[\,\cup\,]\mathbf{0}\,;\,+\infty[$ alors elle est dérivable sur cette réunion d'intervalles.

Fonction $\boldsymbol{f}$	Fonction dérivée $\boldsymbol{f'}$
$\boldsymbol{f : x \mapsto \frac{1}{x}}$	$\boldsymbol{f' : x \mapsto}$ ....

Démonstration

....

....

....

....

....

....

....

....

....

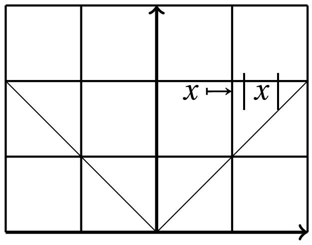
....

3.4 Dérivabilité des fonctions valeur absolue et racine carré

Propriété 6

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$



Pour tout réel x, la valeur absolue de x est notée $|x|$.

1. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.
2. La fonction valeur absolue est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ et on a : $f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Démonstration

....

....

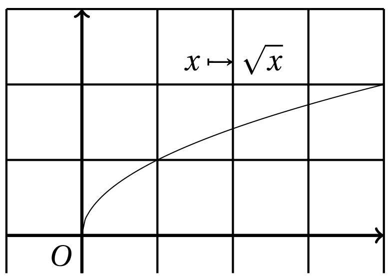
....

....

....

....

Propriété 7



Pour tout réel $x \geqslant 0$, la racine carré de x est l'unique réel positif noté $\sqrt{x}$ tel que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
La fonction racine carré est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. ....
2. ....

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$f' : x \mapsto \ldots\ldots\ldots$

Démonstration

....

....

....

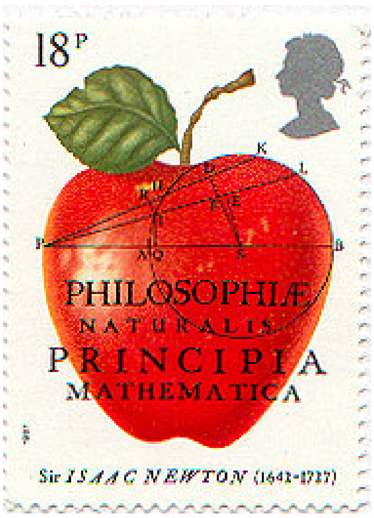
....

....

....

....

....



Source : http://serge.mehl.free.fr/chrono/Newton.html