Histoire 1

- Al-Kashi est un mathématicien persan du XVe siècle. Il a calculé la meilleur approximation de π jamais trouvée à son époque avec 16 décimales. On lui doit une généralisation du théorème de *Pythagore* dans un triangle quelconque, très utile, avec une autre loi, dite des sinus, pour calculer longueurs et angles dans des triangles (applications en astronomie, géodésie ...).

- René Descartes (1596-1650) est un mathématicien et philosophe français. Son oeuvre majeure, le *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, fut publiée avec en appendice un traité, *La Géométrie*, où Descartes démontre l'équivalence entre manipulations algébriques et constructions géométriques et décrit les courbes par des équations. Il libère la géométrie des contraintes des constructions à la règle et au compas et formalise le langage mathématique avec l'usage de lettres de la fin de l'alphabet pour désigner les inconnues ou du début pour les paramètres.

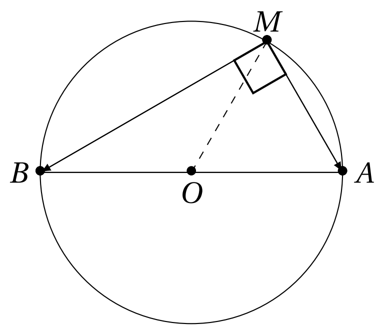
Dans tout le chapitre, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1 Géométrie du triangle

1.1 Lignes de niveau

Propriété 1

Soit A et B deux points distincts du plan.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est un cercle de diamètre $[AB]$.



Démonstration *(détaillée page 216)*

Soit A et B deux points distincts du plan.
Notons Γ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est un cercle de diamètre $[AB]$.
On raisonne par double implication :

- $\boxed{\text{Sens} \Rightarrow}$ On suppose que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

  Si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, notons O le milieu de $[AB]$, d'après la propriété de la médiane on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MO^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MO = \frac{AB}{2}$$

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est donc le cercle de centre 0 et de diamètre $[AB]$.

- $\boxed{\text{Sens} \Leftarrow}$ On suppose que M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.
  Notons Γ le cercle de diamètre $[AB]$ et O le milieu de $[AB]$.

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow MO = \frac{AB}{2}$$
$$M \in \Gamma \Leftrightarrow MO^2 - \frac{AB^2}{4} = 0$$

on applique la propriété de la médiane :

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Capacité 1 ***Déterminer une ligne de niveau (voir exo 1 p. 215)***

Soit un segment $[AB]$ de longueur 4 et I son milieu.

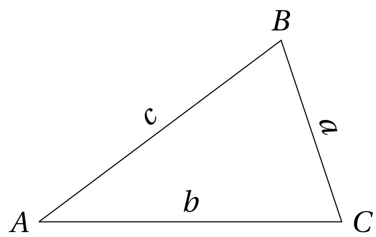
1. Démontrer qu'un point M vérifie $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$ si et seulement si $MI^2 - AI^2 = 2$.
2. En déduire la nature de l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2$.

1.2 Résolution de triangles

Propriété 2 ***Formule d'AL-Kashi***

Pour tout triangle ABC, si on note $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$ on a :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\widehat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos\widehat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\widehat{C}$



Ces formules se déduisent l'une de l'autre par permutation circulaire des sommets. Elles généralisent le théorème de Pythagore et permettent de calculer les mesures de tous les angles d'un triangle à partir des longueurs des trois côtés ou la longueur d'un côté avec la mesure de l'angle opposé et les longueurs des côtés adjacents.

Démonstration ***(détaillée page 216)***

Puisque les formules se déduisent l'une de l'autre par permutation circulaire, il suffit d'en démontrer une, par exemple la deuxième de la liste :

$$b^2 = \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2$$
$$b^2 = \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2$$

Or $AC = b$ et $BC = a$, donc

$$b^2 = \overrightarrow{AC}^2 = c^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + a^2$$

On applique la formule du cosinus

$$b^2 = \overrightarrow{AC}^2 = c^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC}) + a^2$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos\widehat{B}$$

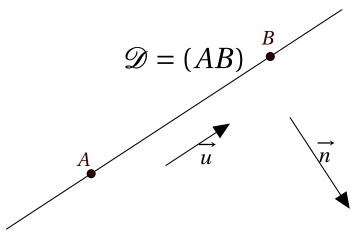
Capacité 2 ***Calculer des angles ou des longueurs avec le produit scalaire (voir exo 2 p. 215)***

1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$,$BC = 6$. Calculer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
2. Soit ABC un triangle tel que $BC = 4$, $\widehat{ABC} = 50°$ et $AB = 3$. Calculer la longueur AC.
3. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 30°$, $AC = 2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$. Calculer la longueur BC.

2 Équations cartésiennes de droites

2.1 Vecteur normal à une droite

Définition 1



1. Un **vecteur directeur** à une droite $\mathscr{D}$ est un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ qui est colinéaire à un vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de $\mathscr{D}$.
2. Un **vecteur normal** à une droite $\mathscr{D}$ est un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ qui est orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Propriété 3

1. Deux **vecteurs directeurs** d'une même droite sont colinéaires.
2. Deux **vecteurs normaux** à une même droite sont colinéaires.
3. Un **vecteur directeur** et un **vecteur normal** d'une même droite sont nécessairement orthogonaux.

Capacité 3 ***Déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal***

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. Soit les points $A(4;5)$ et $B(6;3)$. Déterminer un vecteur directeur et un vecteur normal pour la droite (AB).
2. Déterminer un vecteur directeur et un vecteur normal pour chaque droite :

$$\mathscr{D}_1 : y = x \quad \mathscr{D}_2 : y = -2x \quad \mathscr{D}_3 : y = 3 \quad \mathscr{D}_4 : x = 4$$

2.2 Équation cartésienne d'une droite

Propriété 4

Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et A un point de $\mathscr{D}$.
Un point M du plan appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

Démonstration

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit un point M du plan appartenant à $\mathscr{D}$.

  On raisonne par disjonction des cas :

  - $\boxed{1^{\text{er}}\text{ cas}}$ si $M = A$ alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.
  - $\boxed{2^{\text{e}}\text{ cas}}$ si $M \neq A$, alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Or $\overrightarrow{n}$ est normal à $\mathscr{D}$, donc on a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ Soit un point M du plan appartenant vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

  On raisonne par disjonction des cas :

  - $\boxed{1^{\text{er}}\text{ cas}}$ si $M = A$ alors M appartient à $\mathscr{D}$.

– $\boxed{2^{\text{e}} \text{ cas}}$ si $M \neq A$, alors $\overrightarrow{AM} \neq \vec{0}$ et de $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, on déduit que $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Or A appartient à $\mathscr{D}$, donc M appartient aussi à $\mathscr{D}$.

Propriété 5

1. Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur normal $\boxed{\vec{n}\ (a\,;\,b)}$ et de vecteur directeur $\boxed{\vec{u}\ (-b\,;\,a)}$.

   Il existe un réel c tel que pour tout point $M\left(x\,;\,y\right)$ du plan :

   $$M \text{ appartient à } \mathscr{D} \text{ si et seulement si } \boxed{ax+by+c=0}$$

   $\boxed{ax+by+c=0}$ est une **équation cartésienne** de la droite $\mathscr{D}$.

2. Réciproquement, si $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$, alors $ax+by+c=0$ est une **équation cartésienne** d'une droite de vecteur normal $\boxed{\vec{n}\ (a\,;\,b)}$ et de vecteur directeur $\boxed{\vec{u}\ (-b\,;\,a)}$.

Démonstration

1. Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur normal $\boxed{\vec{n}\ (a\,;\,b)}$. Le vecteur $\boxed{\vec{u}\ (-b\,;\,a)}$ vérifie $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

   $$M(x;y) \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

   On a $\overrightarrow{AM}\left(x-x_A\,;\,y-y_A\right)$

   $$M(x;y) \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$$
   $$M(x;y) \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow ax+by-ax_A-by_A=0$$

   on pose $c=-ax_A-by_A$

   $$M(x;y) \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow ax+by+c=0$$

2. Soit Δ l'ensemble des points du plan tels que $ax+by+c=0$.

   $$M(x;y) \in \Delta \Longleftrightarrow ax+by+c=0$$

   Puisque $(a,b) \neq 0,0)$ on peut supposer $a \neq 0$ et considérer le point A de coordonnées $\left(-\dfrac{c}{a}\,;\,0\right)$.

   $$M(x;y) \in \Delta \Longleftrightarrow a(x-(-\frac{c}{a}))+by=0$$
   $$M(x;y) \in \Delta \Longleftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$$

On considère le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(a; b)$

$$M(x; y) \in \Delta \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = 0$$

On en déduit que Δ est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(a; b)$. De plus $\boxed{\overrightarrow{u}\,(-b; a)}$ vérifie $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ donc est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Capacité 4 ***Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur normal (voir exo 3 p. 245)***

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A\,(2\,;3)$ et $B\,(-5\,;4)$, I le milieu de $[AB]$ et Δ la médiatrice de $[AB]$.

1. A l'aide d'un produit scalaire, caractériser l'appartenance d'un point M du plan à la droite Δ.
2. En déduire une équation cartésienne de la droite Δ.

Capacité 5 ***Déterminer un vecteur normal à une droite (voir exos 1 et 2 p. 245)***

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2y - 3x + 6 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{D}_1$ avec les axes du repère.
2. Déterminer un vecteur normal à $\mathscr{D}_1$ et en déduire une équation de la droite $\mathscr{D}_2$ qui est parallèle à $\mathscr{D}_1$ et passe par le point $B\,(1\,;2)$.
3. Déterminer un vecteur directeur à $\mathscr{D}_1$ et en déduire une équation de la droite $\mathscr{D}_3$ qui est perpendiculaire à $\mathscr{D}_1$ et passe par le point $B\,(1\,;2)$.

Capacité 6 ***Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite***

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x + 2y - 4 = 0$ et le point $A\,(3\,;3)$.

1. Déterminer une équation de la droite Δ, perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par A.
2. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$.

3 Équations cartésiennes de cercles et de paraboles

3.1 Équation cartésienne de cercle

Propriété 6

Soit un point $A(x_A\,;\,y_A)$ et un réel strictement positif R. Pour tout point $M(x\,;\,y)$ du plan :

$M(x\,;\,y)$ appartient au cercle de centre A et de rayon R si et seulement si $\boxed{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2}$.

Démonstration

Notons Γ le cercle de centre A et de rayon R.

$$M(x\,;\,y)\in\Gamma \iff AM^2=R^2$$

On a $\overrightarrow{AM}\,(x-x_A\,;\,y-y_A)$

$$M(x\,;\,y)\in\Gamma \iff (x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$$

Capacité 7 ***Déterminer et utiliser une équation d'un cercle à partir de son centre et de son rayon (voir exo 1 p. 247)***

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, soit les points $A(2\,;\,1)$ et $B(5\,;\,3)$.

1. Soit le cercle Γ de diamètre $[AB]$.

   Déterminer les coordonnées de son centre, son rayon puis une équation de Γ.

2. Déterminer une équation de la tangente en A au cercle Γ.

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ et de la droite Δ d'équation $x+y=6$.

Propriété 7

Si une équation cartésienne est une équation de cercle alors elle peut s'écrire sous une forme développée $x^2+ax+y^2+by+c=0$.

Capacité 8 ***Reconnaître le centre et le rayon d'un cercle à partir de son équation***

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. Déterminer la nature de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2+y^2+2=0$.

   Que peut-on dire de la réciproque de la propriété précédente ?

2. Démontrer que l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2-2x+y^2+6y-26=0$, est un cercle.

Déterminer les coordonnées de son centre et son rayon.

3.2 Équation cartésienne d'une parabole

Propriété 8

Une **parabole** est la courbe d'une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c des réels et a non nul.

La droite d'équation $\boxed{x = -\dfrac{b}{2a}}$ est un axe de symétrie de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Démonstration *détaillée page* 248

Soit la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ représentant la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Dans le chapitre sur le Second degré, on a démontré que pour tout réel x, $f(x)$ pouvait s'écrire sous forme canonique : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.
On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$.
Pour un point $M\left(x; f(x)\right)$ appartenant à $\mathscr{P}$, considérons le symétrique $M'\left(x'; y'\right)$ de M par rapport à $\mathscr{D}$.

- D'une part part, le milieu de $[MM']$ appartient à $\mathscr{D}$ donc a pour abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ ainsi on a :

  $\dfrac{x+x'}{2} = \alpha \Longleftrightarrow x' = 2\alpha - x$.

  On en déduit que $f(x') = a(x'-\alpha)^2 + \beta = a(2\alpha - x - \alpha)^2 + \beta = a(\alpha - x)^2 + \beta = a(x-\alpha)^2 + \beta = f(x)$.

- D'autre part $y' = f(x)$ car $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe des ordonnées.

On en déduit que $y' = f(x')$ et donc que M' appartient aussi à la parabole $\mathscr{P}$.
Pour tout point M de la parabole $\mathscr{P}$, son symétrique M' par rapport à la droite $\mathscr{D}$ appartient à $\mathscr{P}$, donc $\mathscr{D}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{P}$.

Capacité 9 ***Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole (voir exo 2 p. 247)***

Déterminer une équation de la parabole $\mathscr{P}$ qui coupe l'axe des abscisses aux abscisses -4 et 2 et l'axe des ordonnées à l'ordonnée 6.