Partie A

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de premier terme $u_0 = -140$ et de raison $0,9$.

1. Pour tout entier n naturel, on a $u_n = u_0 \times 0,9^n = -140 \times 0,9^n$.

2. On considère la fonction Python ci-dessous :

```python
def mystere(n):
    u = -140
    lis = [u]
    for k in range(n):
        u = u * 0.9
        lis.append(u)
    return lis
```

La valeur renvoyée par `mystere(3)` est :

```
>>> mystere(3)
[-140, -126.0, -113.4, -102.06]
```

3. On a $u_{15} = -140 \times 0,9^{15} \approx -29$.

4. La fonction Python `seuil` ci-dessous est telle que `seuil(-40)` renvoie le plus petit entier naturel n tel que $-40 < u_n$.

```python
def seuil(s):
    n = 0
    u = -140
    while u <= -40 :
        u = u * 0.9
        n = n + 1
    return n
```

Partie B

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
- la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.

Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.

Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$, où, pour tout entier naturel n, v_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $v_0 = 280$.

On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $v_{n+1} = 0,9v_n + 42$.

1. Au mois de février 2019 le nombre de voitures louées est $v_1 = 0,9v_0 + 42 = 0,9 \times 280 + 42 = 294$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = v_n - 420$.

a. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= v_{n+1} - 420 = 0,9v_n + 42 - 420 \\
u_{n+1} &= 0,9v_n - 9 \times 42 \\
u_{n+1} &= 0,9(v_n - 420) = 0,9u_n
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $u_0 = v_0 - 420 = 280 - 420 = -140$.

b. Par propriété des suites géométriques, on en déduit que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = u_0 \times 0,9^n = -140 \times 0,9^n$$

Or $v_n = u_n + 420$ donc

$$v_n = 420 - 140 \times 0,9^n$$

c. Pour tout entier naturel n, on a $-140 \times 0,9^n < 0$ donc $420 - 140 \times 0,9^n < 420$, or $420 < 421$ donc $v_n < 421$.

On en déduit qu'il n'existe pas d'entier naturel n tel que $v_n \geqslant 421$.

3. La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande.

Pour déterminer à partir de de quelle date le nombre de voitures initial sera insuffisant, on peut exécuter un algorithme de seuil déterminant le plus petit entier n tel que :

$$v_n > 380 \iff u_n + 420 > 380 \iff u_n > -40$$

Par balayage avec la calculatrice, on trouve que $v_n > 380$ à partir de l'entier $n = 12$. Au bout de 12 mois soit un an, le nombre initial de véhicules ne sera donc plus suffisant.