Nom : .... Prénom : ....

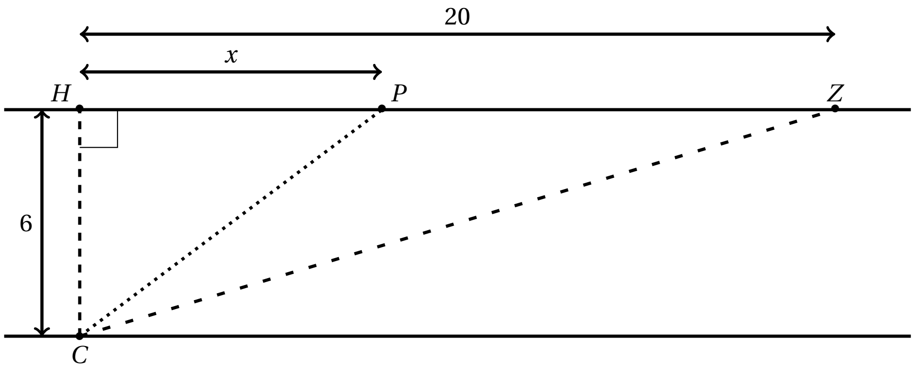
Rendre le sujet complété (exercice 2) avec la copie.

Exercice 1 *Le zèbre et le crocodile*

Le soir de Noël, un crocodile affamé se trouve sur le bord d'une rivière. Il est presque minuit et il se désole de n'avoir rien à manger pour le réveillon. Tout à coup, sur la rive opposée, à la lueur de la pleine lune, il aperçoit un zèbre qui broute paisiblement 20 mètres en aval! Le mammifère n'a pas repéré le reptile et reste immobile. Si le zèbre repère le crocodile on considère qu'il échappera au crocodile car il est plus rapide sur terre. Pour simplifier, on ne tient pas compte du temps de réaction. On suppose que le crocodile dispose d'au plus 10 secondes pour atteindre le zèbre avant que celui-ci tourne la tête et le repère.

Le crocodile veut se jeter sur sa proie le plus vite possible mais il ne se déplace pas à la même vitesse dans l'eau et sur le sol.
Dans l'eau sa vitesse est de 2 **mètres par seconde et sur le sol elle est de** $2,5$ **mètres par seconde.**

Pour simplifier on suppose que les berges de la rivière sont rectilignes et que leur écart est fixe, de 6 mètres.
Dans le schéma ci-après, le crocodile se trouve initialement au point C et le zèbre ne bouge pas du point Z. Le point H est le projeté orthogonal de C sur la rive opposée de la rivière et le point P est un point quelconque du segment $[HZ]$.
On note x **la distance** HP**, qui appartient à l'intervalle** $[0\,;20]$**.**



Partie 1

On suppose dans cette partie que le crocodile traverse la rivière en suivant le segment $[CH]$ puis qu'il longe la rive opposée le long du segment $[HZ]$.

1. Quelle distance parcourt le crocodile dans l'eau en un dixième de seconde? et sur le sol?
2. Démontrer que le temps mis par le crocodile pour atteindre sa proie est exactement de 110 dixième de seconde.
3. Le crocodile pourra-t-il manger le zèbre?

Partie 2

On suppose dans cette question que le crocodile rejoint le zèbre à la nage uniquement, en parcourant le segment $[CZ]$.

1. Calculer la distance, en mètres, parcourue par le crocodile.
2. En déduire le temps mis par le crocodile pour atteindre sa proie au dixième de seconde près.
3. Le crocodile pourra-t-il manger le zèbre?

Partie 3

On suppose dans cette question que le crocodile nage d'abord jusqu'à un point P situé sur la rive opposée entre H et Z puis qu'il rejoint le zèbre par la voie terrestre le long du segment $[PZ]$.

1. Démontrer que le crocodile met au total un temps de $T(x) = 5\sqrt{36+x^2}+4(20-x)$ **dixièmes de secondes** pour atteindre le zèbre.
2. On veut déterminer s'il existe des valeurs de x pour lesquelles le crocodile atteindra sa proie avant le délai de 10 secondes.
   a. Traduire par une inéquation la contrainte de durée de 10 secondes au plus imposée au temps de déplacement du crocodile.

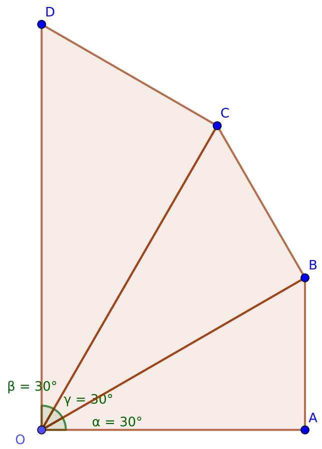
b. Montrer que cette inéquation équivaut à l'inéquation (I) du second degré :

$$25(36+x^2) \leqslant (20+4x)^2 \quad \text{avec} \quad x \in [0\,;20]$$

c. Résoudre l'inéquation (I) et en déduire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le crocodile pourra manger le zèbre avant que celui-ci ne le repère.

Exercice 2 *Trigonométrie et suite de triangles*

On considère la figure ci-dessous où les triangles OAB, OBC et OCD sont respectivement rectangles en A, B et C. De plus les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COD}$ ont tous pour mesure 30° et le segment $[OA]$ a pour longueur 4.



Dans cet exercice on utilisera les valeurs exactes de $\cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(30°) = \dfrac{1}{2}$

1. Justifier que $\tan(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
2. Dans le triangle OAB rectangle en A, calculer les valeurs exactes des longueurs OB et AB.
3. Calculer les valeurs exactes des longueurs OC et BC.
4. Calculer les valeurs exactes des longueurs OD et CD.
5. On a déjà construit deux triangles rectangles supplémentaires à partir du triangle OAB en prenant comme base l'hypoténuse du dernier triangle construit et comme angle trente degrés entre la base et l'hypoténuse du nouveau triangle. Imaginons qu'on répète ce procédé de construction, on définit alors une suite de triangles rectangles. De plus, si on note $u_0 = OA$, $u_1 = OB$, $u_2 = OC$ et $v_0 = AB$, $v_1 = BC$, $v_2 = CD$, alors on peut définir deux suites (u_n) et (v_n) représentant les longueurs des côtés de ces triangles.

   a. Compléter la figure avec le quatrième triangle.

   b. Déterminer les valeurs exactes de u_3 et v_3.

   c. Soit un entier $n \geqslant 0$, exprimer les relations de récurrence de u_{n+1} en fonction de u_n et de v_{n+1} en fonction de v_n.

   d. Déterminer avec la calculatrice des valeurs approchées au dixième de u_{10} et v_{10}.

   e. Compléter les pointillés :

   - On peut conjecturer que pour tout réel $K > 0$, on aura pour n assez grand, $u_n \ldots\ldots K$.
   - On peut conjecturer que pour tout réel $K > 0$, on aura pour n assez grand, $v_n \ldots\ldots K$.

   f. Compléter en **ANNEXE**, la fonction Python `suiteU(n)` qui renvoie le terme de rang `n` de la suite (u_n).

   g. Compléter en **ANNEXE**, la fonction Python `seuilV(s)` qui renvoie le plus petit entier `n` telle que $v_n > s$ où `s` est un réel.

ANNEXE

```python
from math import sqrt #sqrt est la fonction racine carrée en Python

def suiteU(n):
    u = 4
    for k in range(n):
        u = ...
    return u
```

```python
from math import sqrt #sqrt est la fonction racine carrée en Python

def seuilV(s):
    n = 0
    v = 4 * sqrt(3) / 3
    while .......... :
        n = ...
        v = ...
    return ...
```