Exercice 1

On admet qu'on peut définir la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 4}$.

1. **a.** Calculer u_1 et u_2, donner les résultats sous forme d'entier ou de fraction irréductible.

b. On donne $u_{1000} = -\dfrac{1000}{1003}$, calculer u_{999} (sans utiliser la formule explicite de la dernière question).

2. On considère qu'on peut définir la suite (v_n) pour tout entier $n \geqslant 0$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

a. Calculer v_1 et v_2, donner les résultats sous forme d'entier ou de fraction irréductible.

b. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie une liste des $n+1$ premiers termes de la suite (v_n) de v_0 à v_n.

```python
def liste_v(n):
    u = 0
    v = .....
    lis = [v]
    for k in range(n):
        u = .....
        v = ......
        ............
    return lis
```

c. On obtient la liste suivante pour `liste_v(5)`.
On rappelle que Python ne donne que des valeurs approchées des nombres réels, par exemple `1.3333333333333333` représente $\dfrac{4}{3}$ et `1.6666666666666667` représente $\dfrac{5}{3}$.

```
[1.0, 1.3333333333333333, 1.6666666666666667, 2.0,
    2.333333333333333, 2.666666666666666]
```

- Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite (v_n) (arithmétique, géométrique, ni arithmétique ni géométrique) ?
- Démontrer cette conjecture.
- En déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n = \dfrac{-n}{3+n}$.

Exercice 2

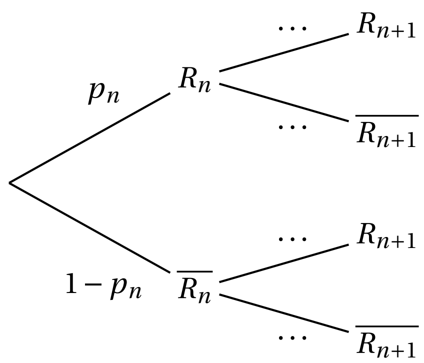
Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'évènement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n-ième séance »,
- p_n la probabilité de l'évènement R_n. On considère que $p_0 = 0,6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3.$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - 0,75$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,6$ et de premier terme $-0,15$.

b. Démontrer que, pour tout entier n naturel n :

$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

c. En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

d. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse

☞ **Affirmation 1 :** *Il existe un entier i tel que $p_i > 0,75 - 10^{-6}$.*

☞ **Affirmation 2 :** *Il existe un entier j tel que $p_j > 0,75$.*