Corrigé de la capacité 7 du cours

Capacité 7 *Résoudre une équation du second degré*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré suivantes :

(fin de la preuve) : $f(x)=0 \iff x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

a. $2x(x+1)=x^2+3x$ **d.** $-(2x)^2-4x=-4$ **g.** $2x^2+5=7$ **j.** $3x^2+1=0$

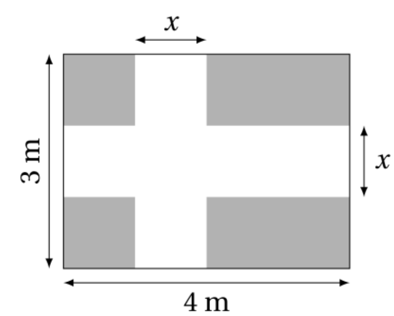
b. $x^2-2x-3=0$ **e.** $x^2=4$ **h.** $x^2=x-1$ **k.** $4x+1=3x^2$

c. $x^2=x+1$ **f.** $3x^2+2x+\frac{1}{3}=0$ **i.** $(3x+1)^2=(3-x)^2$

2. Afin de financer la transition énergétique, la taxe sur les carburants vient de subir deux augmentations mensuelles successives de t % où t est un réel positif.

Déterminer la valeur de t arrondie à 0,1 % près, sachant que le taux d'augmentation global de la taxe sur les carburants a été de 60 % en deux mois.

3. Quelle valeur x doit prendre la largeur de la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?



1) a) $2x(x+1)=x^2+3x$ ssi $2x(x+1)-(x^2+3x)=0$

ssi $x(2(x+1)-(x+3))=0$

ssi $x(2x+2-x-3)=0$

ssi $x(x-1)=0$

D'après la règle du produit nul, l'ensemble des solutions est :

$$S=\{0;1\}.$$

b) $x^2-2x-3=0$

$a=1 \quad b=-2 \quad c=-3$

$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times 1\times(-3) = 4+12=16$

$\Delta>0$ donc l'équation a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{16}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

et $$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{16}}{2}=3$$

$$S=\{-1;3\}$$

c) $x^2=x+1$ ssi $x^2-x-1=0$

$a=1 \quad b=-1 \quad c=-1$

$\Delta = b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-1)=5$

$\Delta>0$ donc l'équation a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

et $$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$S=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

d)

$$-(2x)^2-4x=-4 \text{ ssi } -4x^2-4x+4=0$$

$$a=-4 \quad b=-4 \quad c=4$$

$$\cdot\ \Delta=b^2-4ac=16-4\times(-4)\times 4$$
$$\Delta=16+64=80$$

$\Delta>0$ donc l'équation a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-\sqrt{80}}{-8}=\frac{4-4\sqrt{5}}{-8}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

e) $x^2=4$ ssi $x=\sqrt{4}$ ou $x=-\sqrt{4}$

$$\mathcal{S}=\{-2;2\}$$

f) $3x^2+2x+\frac{1}{3}=0$ ssi $3\left(3x^2+2x+\frac{1}{3}\right)=0$

ssi $9x^2+6x+1=0$

ssi $(3x+1)^2=0$

D'après la règle du produit nul :

$$S = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

Rque : En calculant le discriminant, on obtient $\Delta = 0$ et on retrouve la racine double $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{3}$

g) $2x^2 + 5 = 7$ ssi $2x^2 = 2$

ssi $x^2 = 1$

ssi $x = \sqrt{1} = 1$ ou $x = -\sqrt{1} = -1$

$$S = \{-1 ; 1\}$$

h) $x^2 = x - 1$ ssi $x^2 - x + 1 = 0$

$a = 1$ $b = -1$ $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution

$$S = \{\emptyset\}$$

i)

$(3x+1)^2 = (3-x)^2$ ssi $(3x+1)^2 - (3-x)^2 = 0$

ssi $(3x+1-(3-x))((3x+1)+(3-x)) = 0$

ssi $(3x+1-3+x)(3x+1+3-x) = 0$

ssi $(4x-2)(2x+4) = 0$

ssi $x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{-4}{2} = -2$

d'après la Règle du produit nul

$S = \left\{-2 ; \frac{1}{2}\right\}$

j) $3x^2+1=0$ ssi $x^2 = -\frac{1}{3}$

$S = \{\emptyset\}$

k) $4x+1 = 3x^2$ ssi $3x^2 - 4x - 1 = 0$

$a = 3 \quad b = -4 \quad c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-1)$

$\Delta = 28$

$\Delta > 0$

donc l'équation a deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{28}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4+\sqrt{28}}{6}$$

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{7}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{2-\sqrt{7}}{3} ; \frac{2+\sqrt{7}}{3} \right\}$$

2)

1er mois — 2ème mois

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] P_0 \arrow[r, bend left, "\times(1+t)"] \arrow[rr, bend right, "\times(1+t)^2"'] \arrow[rr, bend right=60, "\times\left(1+\frac{60}{100}\right)"'] & P_1 \arrow[r, bend left, "\times(1+t)"] & P_2 \end{tikzcd}$$

Le taux d'augmentation mensuel est donc solution de l'équation : $(1+t)^2 = 1,6$

$(1+t)^2 = 1,6$ ssi $\begin{cases} 1+t = \sqrt{1,6} \\ \text{ou} \\ 1+t = -\sqrt{1,6} \end{cases}$

mais $t > 0$ donc seule la solution $1+t = \sqrt{1,6}$ est retenue

c'est-à-dire $t = \sqrt{1,6} - 1 \simeq 0,269$

soit $26,9\,\%$

3) L'aire du rectangle est de $3 \times 4 = 12$

l'aire de la croix est :

$$\underbrace{3x}_{\text{bande verticale}} + \underbrace{4x}_{\text{bande horizontale}} - \underbrace{x^2}_{\text{intersection}}$$

Aire croix $= \frac{1}{2}$ Aire terrain ssi $7x - x^2 = \frac{12}{2}$

On résout l'équation :

$-x^2+7x=6$ dans l'intervalle $[0;3]$

puisqu'on doit avoir $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ \text{et} \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

$-x^2+7x=6$ ssi $-x^2+7x-6=0$

On remarque que 1 est racine évidente

Posons $x_1 = 1$ et notons x_2 l'autre racine

Par propriété du cours, on a :

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{-1} = 6$$

$x_1 x_2 = 6$ ssi $1 \times x_2 = 6$

ssi $x_2 = 6$

Comme x doit satisfaire la contrainte $x \in [0;1]$,

on en déduit que la solution

du problème est $x = 1$