Histoire 1

Au XVIII^{ième} siècle, l'Anglais Abraham Moivre et le Français Pierre Simon de Laplace ont étudié les distributions binomiales qui donnent par exemple la répartition des succès lorsqu'on répète plusieurs fois de façon identique une même expérience aléatoire à deux issues comme un lancer de pièce. Par exemple sur un échantillon de taille n, si on suppose que la probabilité de naissance d'un garçon est de $\frac{22}{21+22}$ (établie par mesure statistique), le nombre de naissances de garçons est une fonction dont la valeur dépend du hasard, on parle de variable aléatoire, et dont la loi suit une distribution binomiale de paramètres n et p. Par combinatoire, on peut déterminer les probabilités de tous les nombres de naissances de garçons possibles entre 0 et n. On peut en déduire la valeur moyenne et l'écart-type de la variable aléatoire comme pour une série statistique. À partir de ces indicateurs, Laplace a pu établir des intervalles de fluctuation du nombre de naissances de garçons et déterminer si la distribution sur une commune particulière était normale. Cette normalité, est attachée au théorème de Moivre-Laplace qui établit une convergence des distributions binomiales (après changement d'origine et d'échelle) vers la distribution en cloche d'une variable aléatoire universelle appelée loi normale centrée réduite. Plus généralement, cette universalité est atteinte lors de la superposition d'un grand nombre de causes aléatoires indépendante ce qui a permis à Gauss de développer une théorie de « l'incertitude de la mesure ».

Dans tout ce chapitre, on considère un univers fini Ω sur lequel on a défini une loi de probabilité $\mathbb{P}$.

1 Variables aléatoires réelles

1.1 Activités

Activité 1

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée et l'on note après chaque lancer si le côté sorti est pile (noté P) ou face (noté F) .

1. Représenter à l'aide d'un arbre l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire.

   Une issue est un triplet comme (F, P, F).

2. Combien y-a-t-il d'issues dans l'univers Ω de cette expérience aléatoire ? Quelle loi de probabilité peut-on définir sur Ω ?

   Calculer les probabilités des événements suivants :

   - « Obtenir exactement un Pile »
   - « Obtenir au moins un Pile »

3. On définit à partir de cette expérience aléatoire un jeu qui consiste à gagner 1 € pour chaque face sorti et à perdre 1,1 € pour chaque pile sorti.

   La fonction G de Ω dans $\mathbb{R}$ associe à une issue de l'expérience aléatoire le gain du joueur. *On dit que G est une variable aléatoire.*

   Par exemple à l'issue (F, P, F), la fonction G associe le gain $1-1,1+1=0,9$.

Quelles sont les autres issues telles que $G = 0,9$? En déduire la probabilité de l'événement « le joueur gagne 0,9 € ».

On la note $\mathbb{P}\big(G = 0,9\big)$.

4. Quelles sont toutes les valeurs prises par la variable aléatoire G ?

5. Pour chaque valeur v prise par la variable aléatoire G, déterminer $\mathbb{P}\big(G = v\big)$.

   On détermine ainsi la loi de de probabilité de la variable aléatoire G.

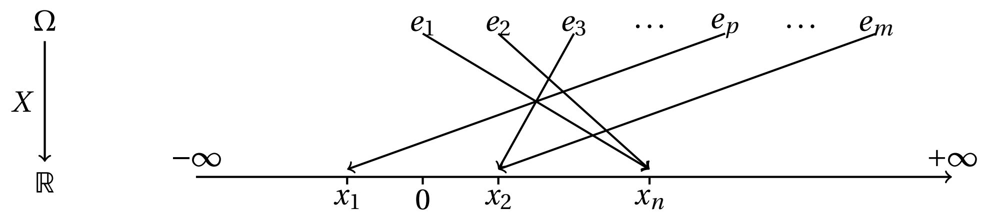
1.2 Définitions et propriété

Définition 1 ***Variable aléatoire et loi de probabilité***

Soit $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_p, \cdots, e_m\}$ **l'ensemble fini** décrivant l'univers d'une expérience aléatoire et $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω.
A chaque issue on associe un nombre, on définit ainsi une fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ appelée **variable aléatoire**.
On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n\}$ avec $n \leqslant m$ l'ensemble de ces nombres appelé **support** de X.

Définir la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur x_i le nombre $p_i = \mathbb{P}\big(X = x_i\big)$ qui est la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$ constitué des issues auxquelles x_i est associée.

valeur k	x_1	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
probabilité $\mathbb{P}\big(X = k\big)$	p_1	$\ldots$	p_i	$\ldots$	p_n



Propriété 1

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$.
On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n\}$, le support de X.
On a :

$$\mathbb{P}\big(X = x_1\big) + \mathbb{P}\big(X = x_2\big) + \ldots + \mathbb{P}\big(X = x_n\big) = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\mathrm{X} = x_i\big) = 1$$

Définition 2 ***Événements liés à une variable aléatoire***

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$.
Soit a une des valeurs prises par X.

- On note $\{X = a\}$ l'ensemble des issues ω de Ω telles que $X(\omega) = a$.

On note $\mathbb{P}(X = a)$ la probabilité de l'événement $\{X = a\}$.

- On note $\{X \leqslant a\}$ l'ensemble des issues ω de Ω telles que $X(\omega) \leqslant a$.
  On note $\mathbb{P}(X \leqslant a)$ la probabilité de l'événement $\{X \leqslant a\}$.
- On note $\{X \geqslant a\}$ l'ensemble des issues ω de Ω telles que $X(\omega) \geqslant a$.
  On note $\mathbb{P}(X \geqslant a)$ la probabilité de l'événement $\{X \geqslant a\}$.

Capacité 1 ***Appliquer les définitions***

On considère une variable aléatoire Y dont on donne la loi de probabilité ci-dessous avec des pointillés pour les probabilités inconnues.

k	-5	-3	4	8
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\dots$	0,15	0,05	$\dots$

On sait que $\mathbb{P}(Y = -5) = 2 \times \mathbb{P}(Y = 8)$.

1. Calculer la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(Y = 8)$.
2. Calculer les probabilités des événements $\{Y \geqslant 4\}$ et $\{Y < 4\}$.

1.3 Modéliser à l'aide d'une variable aléatoire

Capacité 2 ***Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire***

Une urne contient une boule rouge notée R, deux boules vertes notées V_1 et V_2 et deux boules bleues notées B_1 et B_2. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si on tire la boule rouge on gagne 20 euros, si on tire une boule verte on gagne 2 euros et si on tire une boule bleue on perd 15 euros.
On note X le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. En déduire la probabilité que le gain du joueur soit positif.
3. Si on joue un grand nombre de parties, que peut-on conjecturer sur le signe du gain moyen d'un joueur ?

1.4 Simulation

Méthode

La bibliothèque `random` de `Python` propose des fonctions permettant de générer des nombres pseudo-aléatoires :

- ☞ La fonction `random` permet de générer un nombre décimal choisi aléatoirement dans l'intervalle $[0; 1[$ avec l'appel `random()`.
- ☞ La fonction `randint` permet de générer un nombre entier choisi aléatoirement entre deux entiers `a` et `b` (bornes incluses), vérifiant `a` $\leqslant$ `b`, avec l'appel `randint(a, b)`.

```
In [1]: from random import random, randint

In [2]: [randint(1, 6) for k in range(3)]
Out[2]: [2, 3, 4]

In [3]: [random() for k in range(2)]
Out[3]: [0.6222757409726671, 0.965200387415264]
```

Algorithmique 1 ***Simuler une variable aléatoire avec Python***

1. Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour que `somme_n_des(ndes, nfaces)` retourne la somme des résultats obtenus lors de `ndes` lancers d'un dé équilibré à `nfaces`.

```
from random import randint

def somme_n_des(ndes, nfaces):
    s = 0
    for k in range(.........):
        s = s + randint(......., ........)
    return s
```

2. **a.** Compléter la fonction `Python` ci-dessous pour que `gain_urne()` retourne le gain algébrique du jeu décrit dans la capacité 2.

```
from random import random

def gain_urne():
    tirage = random()
    if tirage < 0.2:
        return 20
    elif tirage < ......:
        return 2
    else:
        return ......
```

   b. Un élève a complété la fonction et obtient l'affichage `[59936, 20206, 19858]` lorsqu'il exécute le code ci-dessous. Qu'en pensez-vous ?

```
echantillon = [gain_urne() for k in range(100000)]
distribution = [echantillon.count(val) for val in [-15, 2, 20]]
print(distribution)
```

2 Espérance, variance et écart-type

2.1 Définitions

Définition 3

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$.
On note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs prises par X avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
On définit trois indicateurs pour caractériser la loi de la variable aléatoire X.

☞ L'**espérance E** de la variable aléatoire X, notée $\mathbb{E}(X)$, est définie par :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X = x_1) \times x_1 + \mathbb{P}(X = x_2) \times x_2 + \ldots + \mathbb{P}(X = x_n) \times x_n = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

- $\mathbb{E}(X)$ s'interprète comme la **valeur moyenne** prise par X lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience (*loi des grands nombres*).
- $\mathbb{E}(X)$ s'exprime dans la même unité que les valeurs prises par X.
- Un jeu est **équitable** lorsque l'espérance de gain est nulle, il est **favorable au joueur** si cette espérance de gain est positive.

☞ La **variance V** de la variable aléatoire X, notée $\mathbb{V}(X)$, est définie par :

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = p_1 (x_1 - \mathbb{E}(X))^2 + p_2 (x_2 - \mathbb{E}(X))^2 + \cdots + p_n (x_n - \mathbb{E}(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mathbb{E}(X))^2}$$

- $\mathbb{V}(X)$ mesure le carré de la distance moyenne des valeurs prises par X par rapport à sa valeur moyenne lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience.
- $\mathbb{V}(X)$ est un nombre positif qui s'exprime dans l'unité au carré des valeurs prises par X.
- Un jeu est d'autant plus **risqué** que sa variance est grande.

☞ **L'écart-type** σ de la variable aléatoire X, noté $\sigma(X)$, est la racine carrée de $\mathbb{V}(X)$:

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

- $\sigma(X)$ mesure la distance moyenne des valeurs prises par X par rapport à sa valeur moyenne lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience.
- $\sigma(X)$ est un nombre positif qui s'exprime dans l'unité des valeurs prises par X.
- Un jeu est d'autant plus **risqué** que son écart-type est grand.

Capacité 3 *Calculer une espérance, une variance, un écart type*

1. On considère la variable aléatoire Y dont la loi est donnée ci-dessous :

k	-5	1	2	10
$\mathbb{P}(Y = k)$	0,35	0,5	...	0,1

a. Détailler les calculs de l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de Y, de sa variance $\mathbb{V}(Y)$ et de son écart-type $\sigma(Y)$.

b. Retrouver ces résultats avec l'éditeur de listes de la calculatrice, en suivant les tutoriels **5 Probabilités** : page 340 pour TI, page 343 pour Casio et page 346 pour Numworks.

2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire G définie dans l'activité 1. Ce jeu est-il favorable au joueur ?

3. On lance un dé à 6 faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le nombre porté par la face du dessus.

   Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

4. On lance un dé à n faces équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à n et on note Y le nombre porté par la face du dessus.

   Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Y.

Capacité 4 ***Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème***

Un joueur mise $2,5$ euros pour participer à un jeu.
Ensuite, il tire successivement au hasard deux boules dans une urne contenant quatre boules numérotées de 1 à 4, avec remise dans l'urne de la première boule tirée.
On considère alors la différence entre le plus grand numéro et le plus petit numéro sur les deux boules tirées par le joueur.
Par exemple si le joueur a tiré la boule numérotée 1 puis la boule numérotée 3 ou la boule numérotée 3 puis la boule numérotée 1, la différence entre le plus grand et le plus petit numéro est égale à $3-1=2$.

- Si cette différence est impaire, le joueur reçoit $1,5$ euro.
- Sinon le joueur reçoit une somme en euros égale au triple de cette différence.

G est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique, éventuellement négatif du joueur.
Par exemple si la différence entre le plus grand et le plus petit numéro tirés est 2, il reçoit $3\times 2=6$ € et son gain est la différence entre la somme reçue et sa mise, c'est-à-dire $6-2,5=3,5$ €.

1. Justifier que les valeurs prises par la variable aléatoire G sont $-2,5$, -1 et $3,5$.

2. Compléter le tableau de la loi de probabilité de G :

k	$-2,5$	-1	$3,5$
$\mathbb{P}(G=k)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

3. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(G)$ de la variable aléatoire G. Ce jeu est-il favorable au joueur ?

4. En déduire une estimation du gain total de l'organisateur du jeu sur un échantillon de 4 000 parties.

2.2 Propriétés

Propriété 2 ***admise***

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$.

Pour tous réel a et b , la variable aléatoire $a\mathrm{X}+b$ associe à chaque issue ω le réel $a\mathrm{X}(\omega)+b$ et on a :

- $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$
- $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$
- $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

Capacité 5 ***Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème***

1. Le nombre de spectateurs pour un festival de musique définit une variable aléatoire X d'espérance 12 000 et de variance 1 500. Chaque billet est vendu au tarif de 45 € et le coût global d'organisation du festival est de 100 000 €.

   Soit B la variable aléatoire associée au bénéfice réalisé par l'organisateur du spectacle.

   Déterminer $\mathbb{E}(B)$ et $\sigma(B)$.

2. On considère que pour la session 2 020 d'un concours, la note X sur 10 attribuée à un candidat pris au hasard, aura pour espérance $\mathbb{E}(X) = 5,4$ et pour écart-type $\sigma(X) = 2$

   Le responsable du concours veut obtenir une moyenne de 5 avec un écart-type de 1, 5. Ainsi, il veut appliquer une transformation affine à X en lui associant $aX+b$ avec a et b des réels et $a>0$.

   a. Exprimer $\mathbb{E}(aX+b)$ et $\sigma(aX+b)$ en fonction de a et b.

   b. En déduire le calcul de a et b.

3 Problème de synthèse

Capacité 6 ***Résoudre un problème avec probabilités conditionnelles et variables aléatoires***

Extrait d'un problème posé au Bac, Centres Étrangers mai 2022.
Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.
On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.

   a. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   b. Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.

2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connait pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.

   a. Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie.
   Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

   b. Résoudre l'inéquation pour x réel : $-x^2+30x-81>0$.

   c. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.

   d. Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

3. On observe 10 joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. On suppose que 7 jetons noirs ont été placés dans l'urne (avec 3 jetons blancs).

   Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 joueur gagnant 5 euros ?

Table des matières