1 Sens de variation d'une suite

1.1 Définition

Définition 1

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **constante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} = u_n$.

Corollaire *admis*

- Si une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p alors pour tout couple d'entiers (n, m) avec $p \leqslant n \leqslant m$, on a $u_p \leqslant u_n \leqslant u_m$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p alors pour tout couple d'entiers (n, m) avec $p \leqslant n \leqslant m$, on a $u_p \geqslant u_n \geqslant u_m$.

Remarque 1

Une suite croissante (respectivement décroissante) à partir de son premier rang, est dite croissante (respectivement décroissante).

1.2 Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite

Méthode

Il existe plusieurs méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n).

- ☞ Si le terme général de (u_n) est donné par une formule explicite $u_n = f(n)$ et s'il existe un entier naturel p tel que f monotone sur $[p\,; +\infty[$ alors :
  - (u_n) est décroissante à partir du rang p si f décroissante sur $[p\,; +\infty[$.
  - (u_n) est croissante à partir du rang p si f croissante sur $[p\,; +\infty[$.
- ☞ On peut étudier le **signe de la différence** $u_{n+1} - u_n$ et démontrer qu'il existe un rang p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n$ est de signe constant.
  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ » alors (u_n) est décroissante à partir du rang p.
  - Si « $\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ » alors (u_n) est croissante à partir du rang p.
- ☞ En terminale, on pourra utiliser un **raisonnement par récurrence** . . .

Capacité 1 ***Déterminer le sens de variation de $u_n = f(n)$ avec f monotone, voir exo 2 p.17***

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \sqrt{n} + 3n^2 + 2n - 1$.
Démontrer que (u_n) est monotone à partir du rang 1.

Capacité 2 ***Déterminer le sens de variation d'une suite (u_n) en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, voir exo 2 p.17***

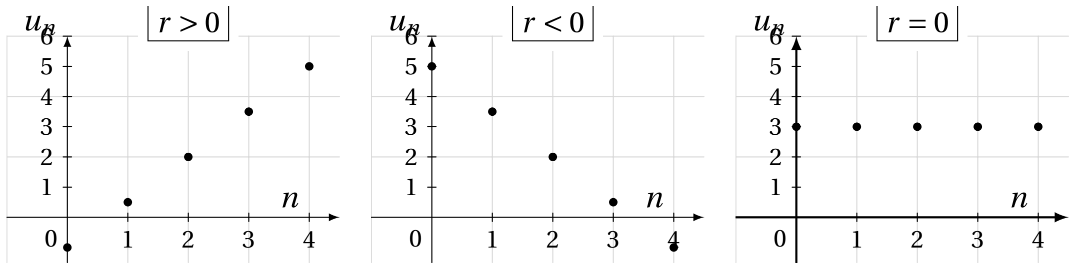
1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + n^2 - 2n + 1$.
   - Soit n un entier quelconque, factoriser $u_{n+1} - u_n$ puis étudier son signe.
   - Conclure sur le sens de variation de la suite (u_n).
2. Reprendre le même plan d'étude pour étudier le sens de variation des suites :
   - (v_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 1 + 0,2^n$.
   - (w_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n+2}{n+3}$.
3. On considère la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{2}{n^2+1} \text{ pour tout entier } n \geqslant 0 \end{cases}$
   - **a.** Détailler le calcul de v_1 et v_2.
   - **b.** Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

1.3 Sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique

Propriété 1 ***Suites arithmétiques***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $r > 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si $r = 0$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $r < 0$.



Propriété 2 *Suites géométriques*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

- **Premier cas** $\boxed{u_0 > 0}$.

  Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $\boxed{1 < q}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $\boxed{0 < q < 1}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 si $q = 0$ et à partir du rang 0 si $q = 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone si $\boxed{q < 0}$

- **Deuxième cas** $\boxed{u_0 > 0}$.

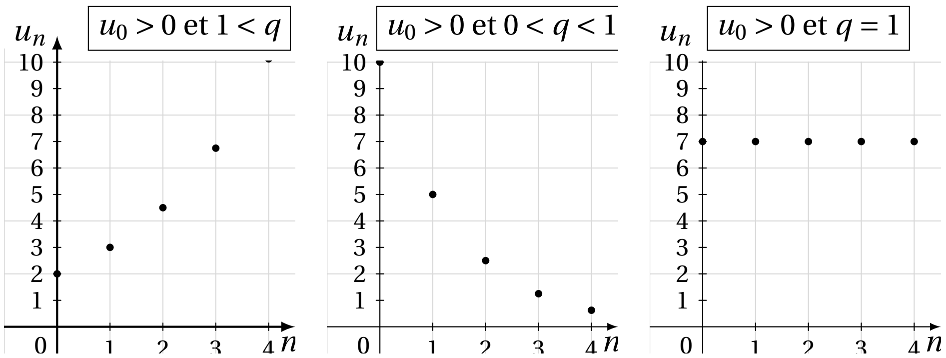
  La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = -u_n$ est géométrique de même raison q et de premier terme $v_0 > 0$.

  On applique la propriété précédente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on en déduit par symétrie le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si $\boxed{1 < q}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $\boxed{0 < q < 1}$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1 si $q = 0$ et à partir du rang 0 si $q = 1$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone si $\boxed{q < 0}$

Les différents cas exposés ci-dessus sont compliqués à retenir. En pratique, la propriété peut se résumer ainsi :

- Si la raison q de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
- Si la raison q de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens de variation est fixé par la comparaison de deux termes consécutifs comme u_0 et u_1.



Démonstration *voir exo 44 p.33*

Capacité 3 *Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique, voir exo 3 p.17*

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m. On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi. Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de 6,05 m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante :

- d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière) ;
- ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

1. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par une suite (u_n), le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac à midi, en cm, n jours après le 1er janvier 2018. Ainsi le niveau d'eau du lac, en cm, le 1er janvier 2018 est donné par $u_0 = 605$.

   a. Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi.

   b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}06u_n - 15$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,06.

   b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que, $u_n = 355 \times 1{,}06^n + 250$.

   c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

   d. Que peut-on dire des valeurs de u_n lorsque n devient très grand ? Le modèle est-il réaliste ?

   e. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.
   Compléter la fonction `seuil()` ci-dessous afin qu'elle retourne le nombre de jours au bout duquel la première date d'intervention des techniciens sera nécessaire.

Algorithme de seuil

```
Fonction seuil(s):
  n ⟵ 0
  u ⟵ 605
  Tant que ... ...
    u ⟵ ...
    n ⟵ n + 1
  Retourne n
```

Python

```python
def seuil(s):
    n = 0
    u = 605
    while ..... :
        u = .........
        n = n + 1
    return n
```

2 Notion de limite d'une suite

2.1 Un exemple d'évolution de population

Activité 1

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants;
- v_n la population en ville, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).

   Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous?

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875

	…	…	…
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelle conjecture peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

5. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout entier naturel n.

- **a.** Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
- **b.** En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.
- **c.** Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

6. Valider ou invalider la conjecture effectuée à la question **3.**.

2.2 Limite finie

Définition 2

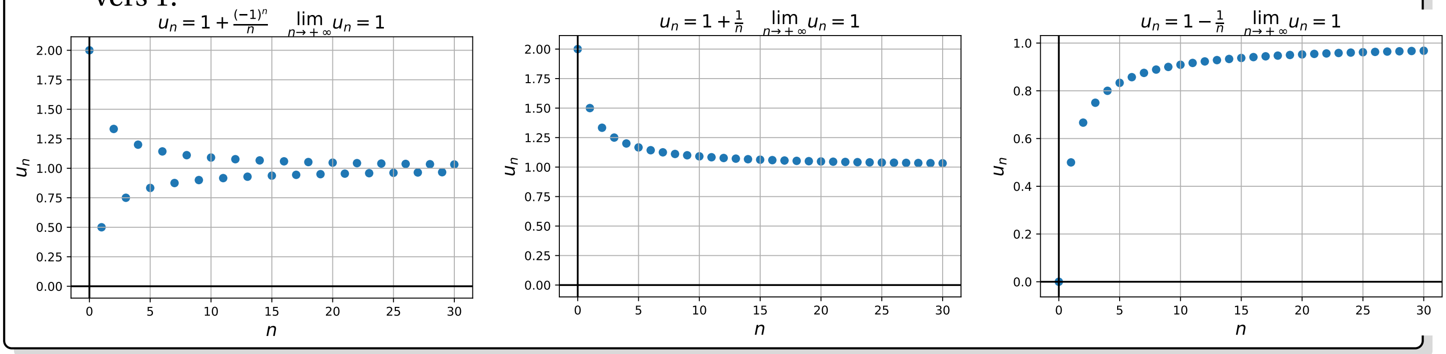
- **Une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si les termes u_n deviennent aussi proches que l'on veut de ℓ dès que n est assez grand.**

  On note $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell}$ et on dit que (u_n) a pour limite ℓ.

- Plus formellement, une suite (u_n) converge vers un réel ℓ si pour tout réel $a > 0$, il existe seuil n_a à partir duquel la distance entre u_n et ℓ devient inférieure à a.

  Avec des quantificateurs, on formule ainsi : pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n_a, tel que pour tout entier $n \geqslant n_a$, $\left| u_n - \ell \right| < a$.

- On donne ci-dessous trois représentations graphiques de suites de limite finie, qui convergent toutes vers 1.



Capacité 4 *Conjecturer la limite d'une suite avec un outil logiciel, voir exo 2 p. 19*

Pour chacune des suites définies ci-dessous, conjecturer avec le mode `suite` de la calculatrice ou avec une fonction écrite en `Python`, si elle possède une limite finie.

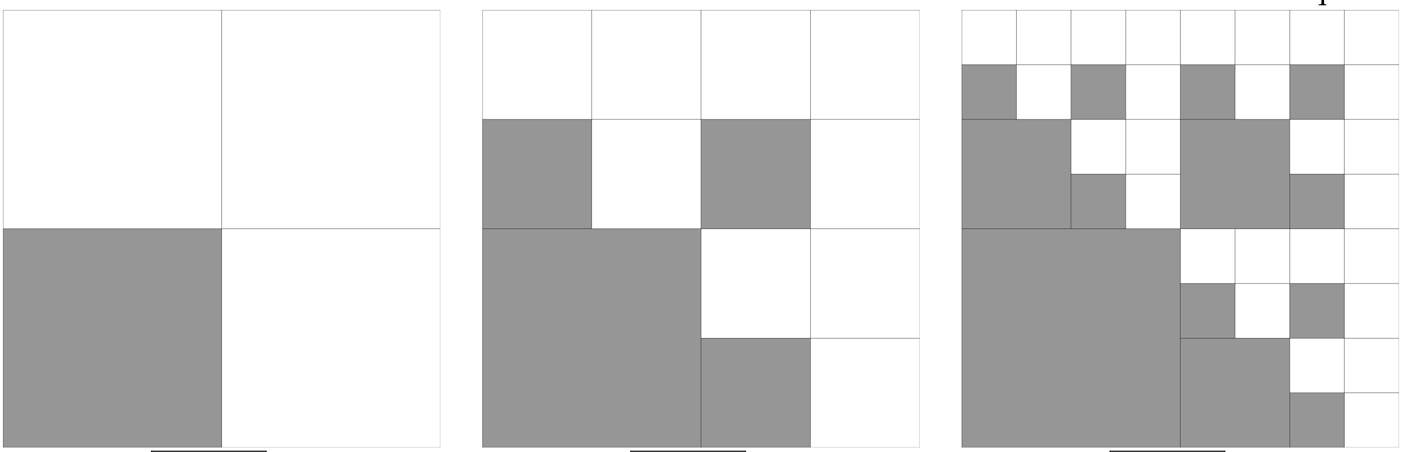
1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 4 - 0,5^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 4 + 10 \times (-0,5)^n$
3. $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -0,5u_n + 1$
4. $u_0 = 100000$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -0,5u_n + 1$
5. $u_0 = 0,0001$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$
6. $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$
7. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$
8. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0,5u_n(1 - u_n)$
9. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2,5u_n(1 - u_n)$
10. $u_0 = 0,8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3,5u_n(1 - u_n)$

Capacité 5 *Conjecturer la limite d'une suite définie par un motif géométrique*

On colorie un carré en plusieurs étapes :

- Étape 1 : on partage le carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré en bas à gauche;
- Étape 2 : on partage chaque carré non coloriée en quatre en quatre carrés de même aire et on colorie le carré en bas à gauche;
- Étapes suivantes : on répète le procédé avec chaque carré non colorié obtenu à l'étape précédente.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit b_n la fraction du carré initial qui n'est pas coloriée à l'étape n, ainsi $b_1 = \dfrac{3}{4}$.



Étape 1 Étape 2 Étape 3

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et en déduire la nature de la suite (b_n).
2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, déterminer une formule explicite de b_n.
3. Conjecturer avec la calculatrice si la suite (b_n) possède une limite finie.
4. Écrire une fonction `Python` qui retourne le nombre d'étapes nécessaires pour que 99% du carré initial soit colorié.

2.3 Limite infinie

Définition 3

- n^2 peut dépasser n'importe quel réel positif a dès que l'entier naturel n est assez grand.

  On dit que la suite $\left(n^2\right)_{n\geqslant 0}$ est divergente et a pour limite $+\infty$.

  On note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty}$.

  Une suite (u_n) pour limite $+\infty$ si u_n peut devenir plus grand que n'importe quel réel $a > 0$ pour n assez grand.

- $-n^2$ peut devenir plus petit que n'importe quel réel négatif a dès que l'entier naturel n est assez grand.

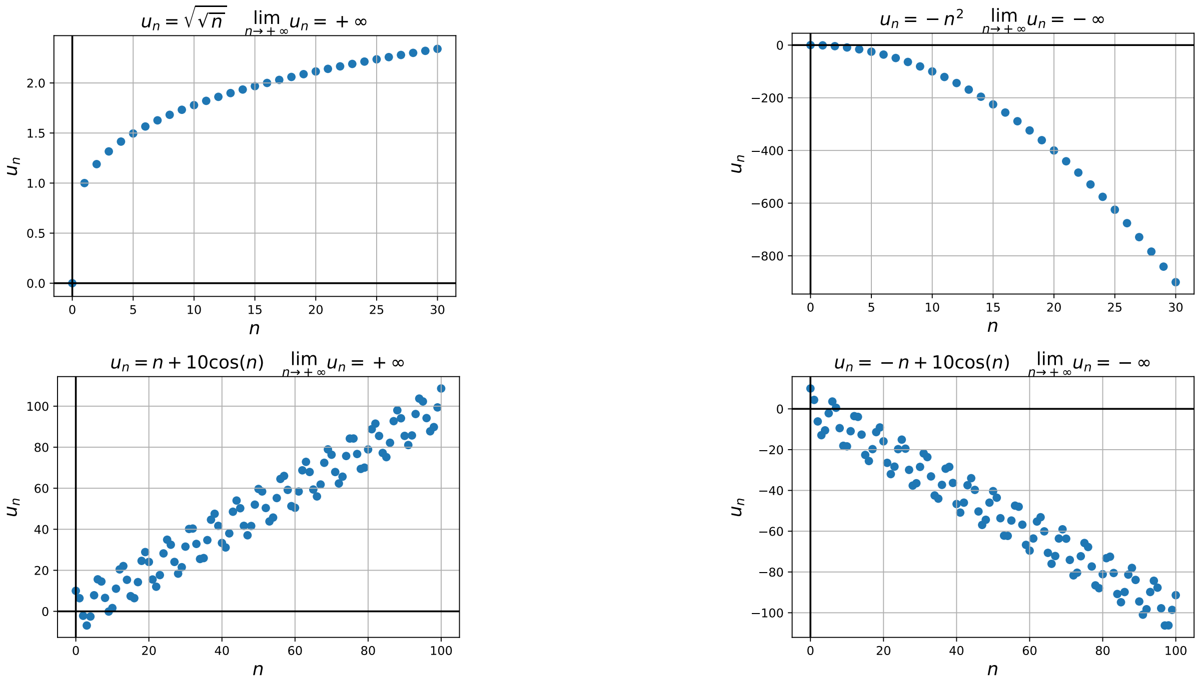
  On dit que la suite $\left(-n^2\right)_{n\geqslant 0}$ est divergente et a pour limite $-\infty$.

  On note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty}$.

  Une suite (u_n) pour limite $-\infty$ si u_n peut devenir plus petit que n'importe quel réel $a < 0$ pour n assez grand.

- On donne ci-dessous trois représentations graphiques de suites de limite infinie.

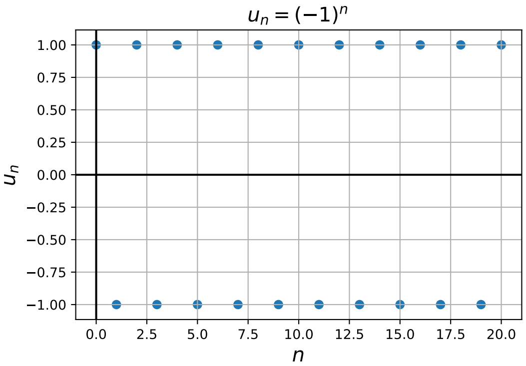
  On peut remarquer que l'évolution d'une suite de limite infinie peut être plus ou moins rapide et qu'une suite peut tendre vers $+\infty$ sans être croissante ou vers $-\infty$ sans être décroissante.

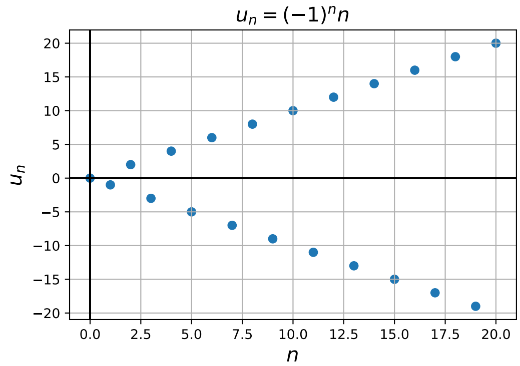


2.4 Suite sans limite

Remarque 2

- Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'a pas nécessairement de limite finie ou infinie.
- Une suite non déterministe à valeurs dans un ensemble fini n'a pas de limite, par exemple la suite des décimales de π ou la suite des résultats lors de la répétition d'une expérience aléatoire de façon indépendante (lancers de dés, de pièces).
- On donne ci-dessous deux exemples de suites sans limite, l'une est bornée (il existe m et M tels que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$) et l'autre non.





Capacité 6 ***Construire des exemples***

Donner un exemple :

- de suite de limite 734 ;
- de suite de limite $+\infty$ puis de suite de limite $-\infty$;
- de suite bornée sans limite puis de suite non bornée sans limite.

3 Problème de synthèse

Capacité 7

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

1. **a.** Calculer les termes u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

   b. Compléter la fonction Python `liste_termes(k)` ci-dessous qui prend en paramètre un entier naturel `k` et renvoie la liste des premiers termes de la suite (u_n) de u_0 à u_k.

```
def liste_termes(k):
    u = 1
    L = [u]
    for i in range(k):
        u = ..........
        L.append(u)
    return ...........
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.

   Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

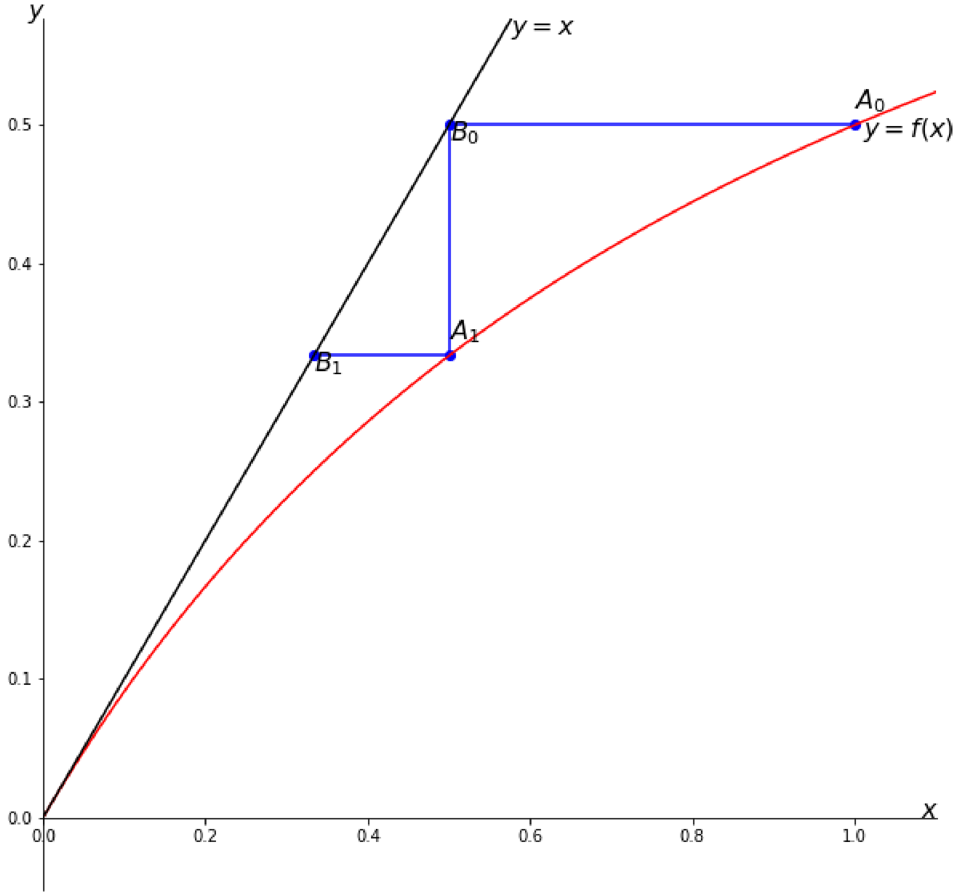
3. Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

   On peut reformuler ainsi la définition de la suite (u_n) :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier } n \geqslant 0 \end{cases}$$

   Sur le graphique ci-dessous, on a représenté :

   - la droite d'équation $y = x$;
   - la courbe d'équation $y = f(x)$.
   - les points :
     - A_0 de coordonnées $(u_0; u_1)$ et B_0 de coordonnées $(u_1; u_1)$;
     - A_1 de coordonnées $(u_1; u_2)$ et B_1 de coordonnées $(u_2; u_2)$.



a. À partir des points déjà représentés, construire les termes u_0, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

b. Compléter le graphique pour construire avec la même méthode les termes u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses.

c. Peut-on conjecturer que la suite (u_n) converge ? Justifier.