Histoire 1

L'étude des probabilités a véritablement commencé au XVII$^{\text{ieme}}$ siècle avec l'analyse combinatoire des jeux de hasard. Dans une correspondance datée de 1654, Blaise Pascal et Pierre de Fermat échangent leurs solutions sur le problème des partis connu depuis la Renaissance : comment répartir équitablement la mise si un jeu de hasard équitable entre deux joueurs est interrompu alors qu'il reste par exemple 2 points à marquer pour l'un et 1 point pour l'autre.
Au XVIII$^{\text{ieme}}$ siècle, Jacques Bernoulli introduira les probabilités comme des nombres entre 0 et 1 et s'intéressera au nombre d'essais pour approcher raisonnablement une probabilité par une fréquence sur un échantillon. Le protestant français réfugié en Angleterre, Abraham de Moivre définira la notion d'indépendance de deux événements et découvrira que la distribution binomiale peut être approchée par une loi normale. Le théorème central limite sera ensuite démontré par Gauss et Laplace et sera utilisé en astronomie, en sciences sociales, en biologie ... pour contrôler la variabilité des erreurs de mesure.

1 Rappels sur les lois de probabilités sur des univers finis

Définition 1

- Une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur l'univers fini $\Omega = \{\mathrm{e}_1 \ ; \ \mathrm{e}_2 \ ; \ \cdots \ ; \ \mathrm{e}_n\}$ d'une expérience aléatoire est une fonction de Ω dans $[0;1]$ qui à chaque issue élémentaire e_i associe un nombre $\mathbb{P}(\{\mathrm{e}_i\})$ compris entre 0 et 1 telle que la somme des probabilités de toutes les issues soit égale à 1 :

$$\mathbb{P}(\{\mathrm{e}_1\}) + \mathbb{P}(\{\mathrm{e}_2\}) + \cdots + \mathbb{P}(\{\mathrm{e}_n\}) = 1 \qquad (1)$$

  $\mathbb{P}(\{\mathrm{e}_i\})$ est la probabilité de l'issue e_i.

- Toute partie A de Ω est appelée **événement** et la probabilité de A selon la loi $\mathbb{P}$ est la somme des probabilités des issues e_i réalisant A :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\mathrm{e}_i \in \mathrm{A}} \mathbb{P}(\{\mathrm{e}_i\}) \qquad (2)$$

D'après la définition d'une loi de probabilité, pour tout événement $A \subset \Omega$ on a $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$

Théorème-Définition 1

- Une loi de probabilité P sur un univers fini $\Omega\{\mathrm{e}_1 \ ; \ \mathrm{e}_2 \ ; \ \cdots \ ; \ \mathrm{e}_n\}$ est dite **équiprobable** (on parle aussi de loi **uniforme**) si les n issues ont la même probabilité, qui est nécessairement $\frac{1}{n}$:

$$\mathbb{P}(\{\mathrm{e}_1\}) = \mathbb{P}(\{\mathrm{e}_2\}) = \cdots = \mathbb{P}(\{\mathrm{e}_n\}) = \frac{1}{n}$$

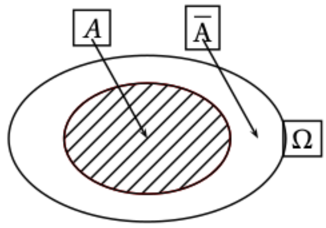
- Dans une **situation d'équiprobabilité**, pour tout événement A inclus dans Ω on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent A}}{\text{nombre total d'issues de }\Omega} \tag{3}$$

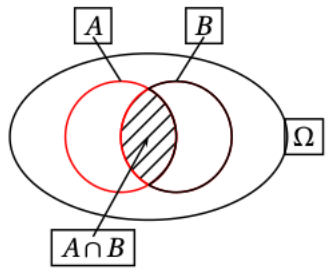
Définition 2 *Opération sur les événements*

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et A et B deux événements inclus dans Ω.

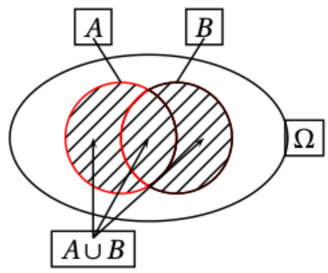
1. L'événement contraire de A dans Ω, noté $\overline{A}$ est l'ensemble des issues de Ω qui ne réalisent pas A.



2. L'**intersection** de A et de B,notée $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A et B.
Si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$, on dit que A et B sont **incompatibles**.



3. La **réunion** de A et de B,notée $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B (au moins l'un des deux).
On a donc $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.



Propriété 1

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et A et B deux événements inclus dans Ω et une loi de probabilité P définie sur Ω .

- $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ *Formule du crible*
- Si A et B sont incompatibles, on a $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$ et $\mathbb{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) + \mathbb{P}(\mathrm{B})$
- $\mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{A})$

Capacité 1 *Calculer une probabilité avec un tableau d'effectifs*

Une classe de première comporte 33 élèves. 15 pratiquent le hand-ball (noté H), 8 le tennis (noté T) et 17 ne pratiquent ni l'un ni l'autre. On choisit un élève au hasard dans cette classe.

Calculer la probabilité qu'il pratique :

- les deux sports;
- l'un au moins des deux sports.

	H	$\overline{H}$	Total
T			8
$\overline{T}$		17	
Total	15		33

2 Probabilité conditionnelle

Dans toute cette section, on considère une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers fini Ω.

2.1 Activité

Activité 1 *Voir Situation 1 page 274*

Une société comprend 750 employés dont 300 cadres. De plus 60 cadres et 28 des autres employés parlent l'anglais.
On interroge au hasard un employé de la société et on considère les événements suivants :
C :« L'employé interrogé est un cadre » **et** **A :« L'employé interrogé parle anglais »**
On note $\mathbb{P}$ la loi de probabilité uniforme qui modélise le choix au hasard d'un employé de la société.

1. Recopier et compléter le tableau d'effectifs suivant :

	C	$\overline{\text{C}}$	Total
A			
$\overline{\text{A}}$			
Total			

2. **a.** Déterminer $\mathbb{P}(\text{C})$ et $\mathbb{P}(\text{C} \cap \text{A})$

   b. Déterminer la probabilité d'interroger un employé qui parle anglais sachant qu'on interroge un cadre. Cette probabilité est notée $\mathbb{P}_{\text{C}}(\text{A})$.En déduire $\mathbb{P}_{\text{C}}\left(\overline{\text{A}}\right)$ (interpréter d'abord cette probabilité).
   Comparer $\mathbb{P}(\text{C}) \times \mathbb{P}_{\text{C}}(\text{A})$, $\mathbb{P}(\text{C} \cap \text{A})$ et $\mathbb{P}(\text{C}) \times \mathbb{P}(\text{A})$.

   c. En déduire une écriture de $\mathbb{P}_{\text{C}}(\text{A})$ en fonction de $\mathbb{P}(\text{C} \cap \text{A})$ et $\mathbb{P}(\text{C})$.

3. **a.** Déterminer $\mathbb{P}(\text{A})$.

   b. Déterminer la probabilité d'interroger un employé qui est un cadre sachant qu'il parle anglais. Cette probabilité est notée $\mathbb{P}_{\text{A}}(\text{C})$.En déduire $\mathbb{P}_{\text{A}}\left(\overline{\text{C}}\right)$ (interpréter d'abord cette probabilité).
   Comparer $\mathbb{P}(\text{A}) \times \mathbb{P}_{\text{A}}(\text{C})$ et $\mathbb{P}(\text{C} \cap \text{A})$

   c. En déduire une écriture de $\mathbb{P}_{\text{A}}(\text{C})$ en fonction de $\mathbb{P}(\text{C} \cap \text{A})$ et $\mathbb{P}(\text{A})$

2.2 Probabilité conditionnelle de B sachant A

Définition 3

A et B sont deux événements et $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
La probabilité de l'événement B sachant que l'événement A s'est réalisé, notée $\mathbb{P}_A(B)$ est définie par :

$$\boxed{\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}}$$

De même, si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a $\boxed{\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$.

Propriété 2

Soient A et B deux événements inclus dans Ω tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$:

1. $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}$ (si $P(A) \neq 0$) et $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)}$ (si $P(B) \neq 0$).
2. $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1$:

⚠ En général, on n'a pas $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ sauf si A et B sont indépendants pour la loi $\mathbb{P}$.

Démonstration *Voir manuel page 282*

....
....
....
....
....
....

Capacité 2 *Appliquer la formule des probabilités conditionnelles*

Soit l'univers Ω d'une expérience aléatoire sur lequel on définit une loi de probabilité $\mathbb{P}$ et soit D et C deux événements.
On donne : $\mathbb{P}(C) = 0,3$, $\mathbb{P}_C(D) = 0,2$ et $\mathbb{P}(C \cup D) = 0,8$.
Calculer $\mathbb{P}(D)$ puis $\mathbb{P}_D(C)$.

Logique 1

1. A et B sont deux événements de probabilité non nulle. Pour chacune de affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, en justifiant.
   - **Affirmation 1** Pour tout événement A, on a $\mathbb{P}_A(A) = 1$.
   - **Affirmation 2** Il existe des événements A et B tels que $\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) < \mathbb{P}(A \cap B)$.
   - **Affirmation 3** Il existe des événements A et B incompatibles tels que $\mathbb{P}_B(A) > 0$.
2. L'implication suivante (I) est-elle vraie ?

   (I) : « Si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$ alors $\mathbb{P}_B(A) < \mathbb{P}_A(B)$ »

2.3 Utilisation d'un tableau croisé d'effectifs

Capacité 3 *Calculer des probabilités conditionnelles avec un tableau croisé d'effectifs*

Un nouveau logiciel permet de filtrer les messages sur une messagerie électronique.
Les concepteurs l'ont testé pour 1 000 messages et voici leurs conclusions :

- 70 % des messages entrants sont indésirables ;
- 95 % des messages indésirables sont éliminés ;
- 2 % des messages bienvenus sont éliminés.

On considère les événements B : « le message est bienvenu », I : « le message est indésirable », E : « le message est éliminé » et C : « le message est conservé ».

1. Compléter le tableau suivant :

	Nombre de messages indésirables	Nombre de messages bienvenus	Total
Nombre de messages éliminés			
Nombre de messages conservés			
Total			1 000

2. Un message est envoyé ; utiliser le tableau précédent pour calculer les probabilités demandées ci-dessous. Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

   a. Calculer $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{B})$ et $P_{\mathrm{I}}(\mathrm{E})$.

   b. Calculer $P(\mathrm{B} \cap \mathrm{E})$ et $P(\mathrm{E} \cap \mathrm{I})$.

   c. Calculer la probabilité pour que le message soit indésirable sachant qu'il est éliminé.

   d. Calculer la probabilité pour que le message soit conservé et indésirable.

3 Arbres pondérés et probabilités totales

Dans toute cette section, on considère une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers fini Ω.

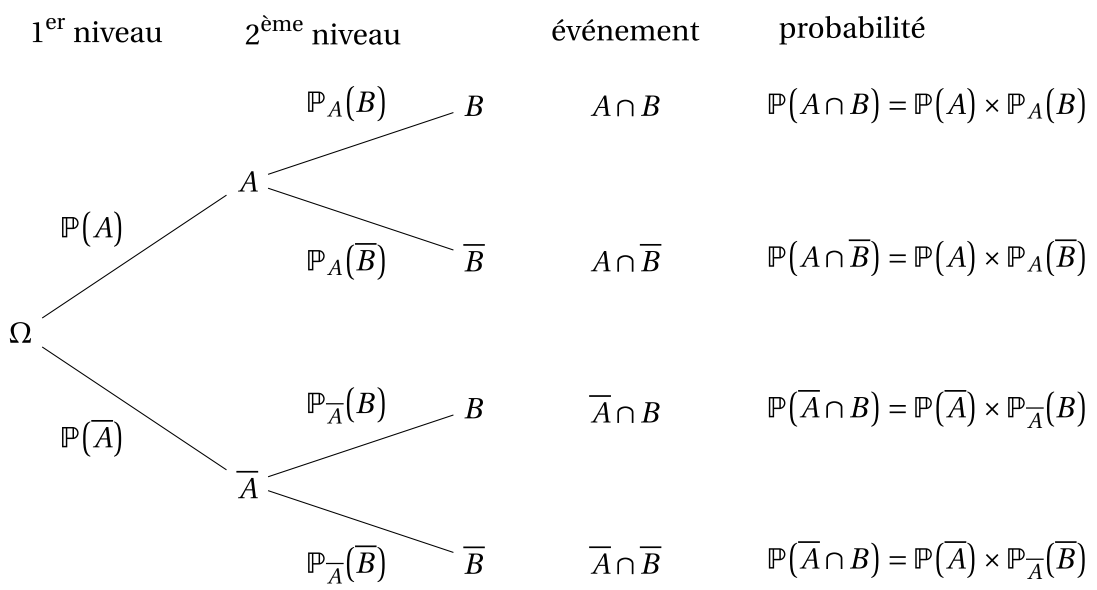
3.1 De l'arbre de dénombrement à l'arbre pondéré

Activité 2 *Situation 2 page 274 du manuel*

3.2 Arbres pondérés

Méthode

On considère une loi de probabilité $\mathbb{P}$ définie sur l'univers fini Ω d'une expérience aléatoire qui permet de définir la probabilité d'un événement A et les probabilités conditionnelles d'un événement B sachant que A ou $\overline{A}$ est réalisé. On peut modéliser cette situation par un arbre pondéré comme ci-dessous :



- Une **branche** de l'arbre relie deux événements ou **noeuds** et chaque branche porte une probabilité.
- Le noeud racine est Ω l'univers de l'expérience aléatoire.
- Les branches de **premier niveau** portent des probabilités comme $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(\overline{A})$ dont l'univers de référence est Ω.
- Les branches de **second niveau** portent des probabilités conditionnelles comme $\mathbb{P}_A(B)$ portée par la branche reliant un noeud A à un noeud B.
- Un **chemin** est une suite de branches de la racine Ω jusqu'à un noeud d'extrémité.

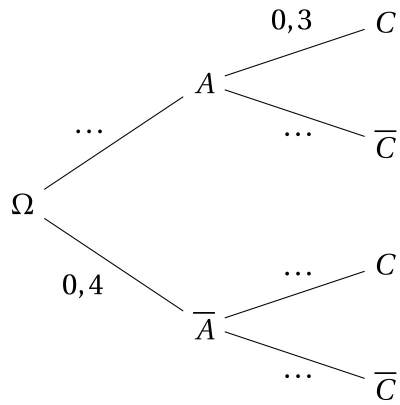
  La probabilité d'un chemin est la probabilité de l'intersection des événements traversés par ce chemin. Elle est égale au produit des probabilités portées par les branches successives, par exemple $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}_A(B)$.
- La somme des probabilités portées par les branches issues d'un même noeud est toujours égale à 1 : $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(\overline{A})=1$, $\mathbb{P}_A(B)+\mathbb{P}_A(\overline{B})=1\ldots$

Propriété 3

1. *Règle du produit* : Dans un arbre pondéré la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par les branches successives.

2. *Règle de la somme* : Dans un arbre pondéré la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même noeud doit être égale à 1.

Capacité 4 *Utiliser un arbre pondéré pour calculer une probabilité*



1. On donne $\mathbb{P}(C) = 0,36$.
   Compléter l'arbre ci-contre.
2. Calculer $\mathbb{P}_C(A)$.

Capacité 5 *Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée*

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.
L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée. Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.
Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4% des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5 % des cas.
On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

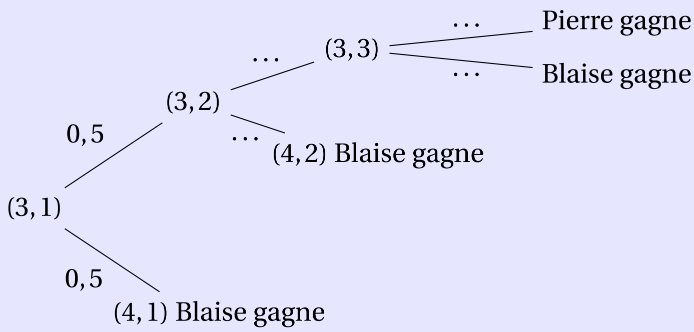
1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $0,0192$.
4. Un jour, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Histoire 2 *Le problème des partis*

Blaise et Pierre lancent successivement une pièce équilibrée. Blaise marque un point si la pièce tombe sur Pile, sinon Pierre marque un point. Le premier arrivé à 4 points remporte la mise de 80 euros.
La partie est interrompue alors que Blaise a 3 points et Pierre 1 point. Comment faut-il répartir équitablement la mise? Pour répondre à ce problème, on va calculer la probabilité que Blaise ait gagné si la partie avait continué.
On note (n, m) l'événement Blaise a n points et Pierre m points avec $0 \leqslant n \leqslant 4$ et $0 \leqslant m \leqslant 4$. Lorsque la

partie s'arrête l'événement $(3,1)$ est réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que Blaise gagne si l'événement $(3,1)$ est réalisé puis conclure.

3.3 Formule des probabilités totales

Définition 4

Une partition de l'univers Ω d'une expérience aléatoire est un ensemble d'événements deux à deux incompatibles et dont la réunion est Ω.
Par exemple un événement A et son contraire $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

Ω

A	$\overline{A}$

ou

Ω

A_0	A_1	$A_{...}$	A_k	$A_{...}$	A_{n-1}	A_n

Dans l'arbre pondéré page 6 la probabilité de l'événement B s'obtient en additionnant les probabilités de tous les chemins qui se terminent en B :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

Cela nous conduit à l'énoncé de la formule des probabilités totales.

Propriété 4 ***Formule des probabilités totales***

Soit une partition de Ω formée des événements $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_k$
Pour tout événement B inclus dans Ω on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_1) + \mathbb{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_2) + \cdots + \mathbb{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_k)$$

De plus si pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \cdots ; k\}$ on a $\mathbb{P}(\mathrm{A}_i) \neq 0$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_1) \times \mathbb{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}) + \mathbb{P}(\mathrm{A}_2) \times \mathbb{P}_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}) + \cdots + \mathbb{P}(\mathrm{A}_k) \times \mathbb{P}_{\mathrm{A}_k}(\mathrm{B})$$

En particulier si A est un événement inclus dans Ω tel que $\mathbb{P}(\mathrm{A}) \neq 0$ et $\mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) \neq 0$ on a pour tout événement

$B \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) \times \mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})$$

Démonstration ***Voir manuel page 282***

Démontrons la formule dans le cas d'une partition de l'univers Ω constituée d'un événement A et de son contraire $\overline{A}$.

....

....

....

....

....

Capacité 6 ***Calculer une probabilité avec la formule des probabilités totales***

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,99$;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$.

Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.
On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

1. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $M \cap T$.
3. Démontrer que la probabilité $\mathbb{P}(T)$ est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.
4. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.
   Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

4 Indépendance et répétition d'expériences

Dans toute cette section, on considère une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur un univers fini Ω.

4.1 Indépendance de deux événements

Définition 5

Deux événements A et B inclus dans Ω sont **indépendants** pour la loi $\mathbb{P}$ si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Remarque 1

Indépendance et incompatibilité sont des relations entre des événements qui n'ont pas du tout le même sens.
Deux événements A et B sont incompatibles si leur intersection est vide, cela ne dépend pas de la loi de probabilité $\mathbb{P}$.
Par exemple si $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ alors $0 < \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) < 1$ et $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \times \mathbb{P}(A) \neq 0$ alors que $\mathbb{P}\left(A \cap \overline{A}\right) = 0$. Dans ce cas, A et $\overline{A}$ sont incompatibles mais pas indépendants.
De plus deux événements peuvent être indépendants pour une loi $\mathbb{P}$ et pas pour une autre loi $\mathbb{P}'$.
L'indépendance de deux événements dépend de la loi de probabilité et donc du modèle choisi.

Capacité 7 *Étudier l'indépendance de deux événements*

Un glacier propose trois parfums : « banane » noté B, « chocolat » noté C et « vanille » noté V. Le tableau d'effectifs ci-dessous donne la répartition par sexe du client (F pour fille), des 100 glaces une boules vendues le 15 août 2019.

	B	C	V	Total
F	10	10	20	40
$\overline{F}$	15	30	15	60
Total	25	40	35	100

On choisit un élément au hasard dans l'univers Ω, on suppose que tous les éléments ont la même probabilité d'être choisi et on note $\mathbb{P}$ la loi d'équiprobabilité ainsi définie.

1. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(F)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(F \cap B)$. Les événements F et B sont-ils indépendants pour la loi $\mathbb{P}$? sont-ils incompatibles ?
2. Les événements F et V sont-ils indépendants pour la loi $\mathbb{P}$?
3. Les événements B et V sont-ils indépendants pour la loi $\mathbb{P}$?

Propriété 5

1. Soient deux événements A et B de probabilités non nulles :
   - A et B sont indépendants pour la loi $\mathbb{P}$ si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.
   - A et B sont indépendants pour la loi $\mathbb{P}$ si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.
2. Si deux événements A et B sont indépendants pour la loi $\mathbb{P}$ alors A et $\overline{B}$, B et $\overline{A}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont deux à deux indépendants pour la loi $\mathbb{P}$.

Démonstration *Voir manuel page 282*

. . . .

. . . .

. . . .

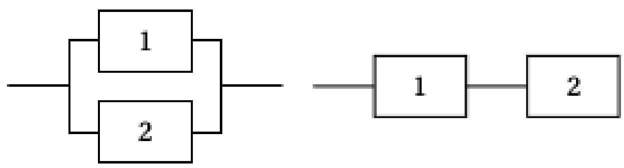
. . . .

. . . .

. . . .

Capacité 8 *Utiliser l'indépendance de deux événements*

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-contre :



Circuit en parallèle A

Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

4.2 Répétition de plusieurs expériences indépendantes

Définition 6

On considère n expériences aléatoires **successives**. Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des autres expériences, on dit que ces expériences sont **indépendantes**.

Définition 7

Soit n un entier naturel. Soit une expérience aléatoire E qui est constituée d'une succession d'expériences aléatoires E_1, E_2, ... , E_n, d'univers finis Ω_1, Ω_2, ... Ω_n.

- L'univers Ω de l'expérience E est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ des univers de la succession d'expériences aléatoires.

- Une issue de Ω est un n-uplet (ou liste) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'issues du produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$.

Propriété 6

Soit n un entier naturel. Soit une expérience aléatoire E qui est constituée d'une succession d'expériences aléatoires **indépendantes** E_1, E_2, … E_n, d'univers finis Ω_1, Ω_2, $\cdots$ Ω_n.
La probabilité d'une liste d'issues $(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i : $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_n) = \mathbb{P}(\mathrm{x}_1) \times \mathbb{P}(\mathrm{x}_2) \times \cdots \mathbb{P}(\mathrm{x}_n)}$

Capacité 9 *Étudier une succession d'expériences*

On considère deux urnes :

- l'urne A contient trois boules rouges (R) et deux boules vertes (V) ;
- l'urne B contient deux boules vertes (V) et quatre boules rouges (R).

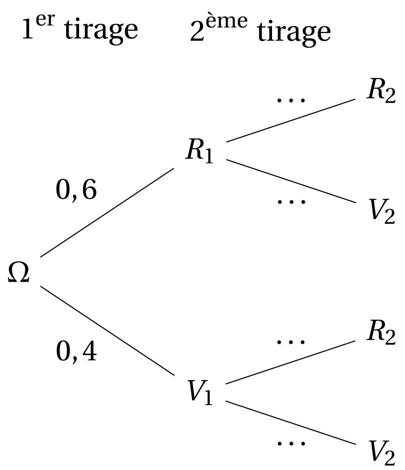
1. *Situation 1 : deux tirages sans remise dans la même urne* On tire successivement deux boules dans l'urne A sans remise de la première boule tirée.

   a. Compléter l'arbre pondéré ci-après.

   b. Les tirages 1 et 2 sont-ils des expériences aléatoires indépendantes ?

   c. Calculer la probabilité des événements suivants :

   - E : « Tirer 1 boule verte au 2nd tirage ».
   - F : « Tirer 2 boules vertes ».
   - G : « Tirer 2 boules de même couleur ».



2. *Situation 2 : deux tirages avec remise dans la même urne* On tire successivement deux boules dans l'urne A avec remise de la première boule tirée.

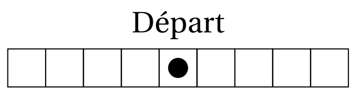
   Reprendre les questions de la situation 1.

3. <u>*Situation 3 : deux tirages successifs dans deux urnes distinctes*</u> On tire successivement une boule dans l'urne A puis une boule dans l'urne B.

   Reprendre les questions de la situation 1.

Capacité 10 *Étudier la répétition d'expériences identiques et indépendantes*

Un ruban est constitué de neuf cases consécutives et un pion est placé sur la case centrale qui est la case de départ.

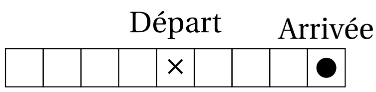


Pour déplacer le pion, on tire une boule dans une urne avec *3 boules vertes* et *2 boules bleues*.

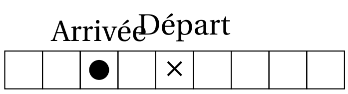
- si la boule tirée est verte alors le pion se déplace d'une case vers la droite ;
- sinon le pion se déplace d'une case vers la gauche.

On remet ensuite la boule tirée dans l'urne puis on recommence.
Une *marche aléatoire* du pion est constituée de quatre tirages successifs avec remise dans l'urne et donc de *quatre déplacements* du pion.
On code V le tirage d'une boule verte et B le tirage d'une boule bleue.

- La série de tirages $VVVV$ se traduit par quatre déplacements vers la droite et aucun déplacement vers la gauche et le pion atteint finalement la case ci-dessous. On a marqué d'une croix la position de départ.

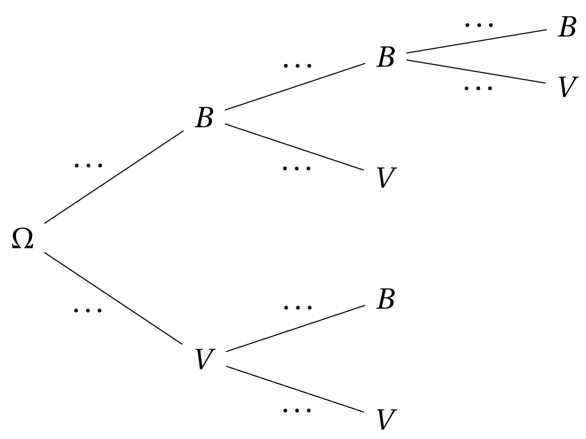


- La série de tirages $BVBB$ se traduit au total par trois déplacements vers la gauche et un déplacement vers la droite et le pion atteint finalement la case ci-dessous. On a marqué d'une croix la position de départ.



1. Quelle est la position finale du pion pour la série de tirages $VBVV$? Quelles séries de tirages donnent la même position finale ?
2. Reproduire le ruban et colorier toutes les cases que le pion peut atteindre au terme d'une *marche aléatoire* de quatre déplacements successifs.
3. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous pour qu'il modélise les quatre tirages successifs avec remise dans l'urne, qui vont déterminer une *marche aléatoire* du pion.
4. Calculer les probabilités des événements suivants :
   - A = « le pion a effectué 4 déplacements vers la droite au cours de la marche »
   - B = « le pion n'a effectué aucun déplacement vers la droite au cours de la marche »
   - C = « le pion a effectué au moins un déplacement vers la droite au cours de la marche »

- D = « le pion a effectué exactement un déplacement vers la droite au cours de la marche »



5. On dispose d'un fonction `random()` qui retourne un réel choisi aléatoirement dans $[0\,;1[$

Compléter la fonction algorithmique ci-dessous et sa traduction en `Python` pour que `freqDroite1(n)` retourne la fréquence de marches aléatoires avec exactement un déplacement vers la droite sur un échantillon de n marches aléatoires.

Algorithme

```
Fonction freqDroite1(n):
   c ⟵ 0
   Pour i allant de 1 à n
      d ⟵ ...
      Pour j allant de 1 à 4
         Si random() <= 0.6 alors
            d ⟵ ...
      Si d = 1 alors
         c ⟵ d + 1
   Retourne c / n
```

Python

```python
from random import random

def freqDroite1(n):
    c = .....
    for i in range(1, .....):
        d = .....
        for j in range(.....):
            if .............:
                d = d + 1
        if d == 1:
            c = c + 1
    return c / n
```

6. On a représenté graphiquement ci-contre les valeurs retournées par `freqDroite1(n)` pour une taille d'échantillon `n` croissante. Les résultats expérimentaux sont-ils cohérents avec la probabilité $\mathbb{P}(D)$?
Commenter l'évolution de la fréquence en fonction de la taille de l'échantillon.