Histoire 1

- Archimède calculait dès l'Antiquité des aires par décomposition d'une surface en une infinité de segments de droites, mais les mathématiciens sont gênés par ces calculs sur des *infinitésimaux* ou *indivisibles* : en ajoutant des lignes unidimensionnelles, sans largeur, on obtient des aires à deux dimensions.

- Isaac Newton (1642-1727) est un mathématicien et physicien anglais, père de la physique moderne et découvreur de la gravitation universelle dans son fameux *Principia* de 1687. En 1669 il écrit le *De analysi*, premier exposé rigoureux de *calcul infinitésimal*, basé sur le passage à la limite dans des séries infinies, où il définit les dérivées comme des *fluxions* (quantités changeant avec le temps) et établit la détermination de l'aire délimitée par une courbe comme le processus inverse de la détermination d'une tangente à cette courbe.

- Gottfried Leibniz (1646-1716) est un philosophe, physicien et mathématicien allemand considéré comme l'un des derniers universalistes. En 1686 il publie un traité de *calcul différentiel* où il présente des résultats équivalents à ceux de Newton. Une grave querelle oppose les sociétés scientifiques allemandes et anglaises sur la paternité du calcul différentiel car Newton n'a publié son *De analysi* qu'en 1711. Les notations de Leibniz pour la différentiation et l'intégration, plus pratiques, ne se sont imposées en Angleterre qu'au début du XIXe siècle.

1 Activités d'introduction

1.1 Point de vue économique

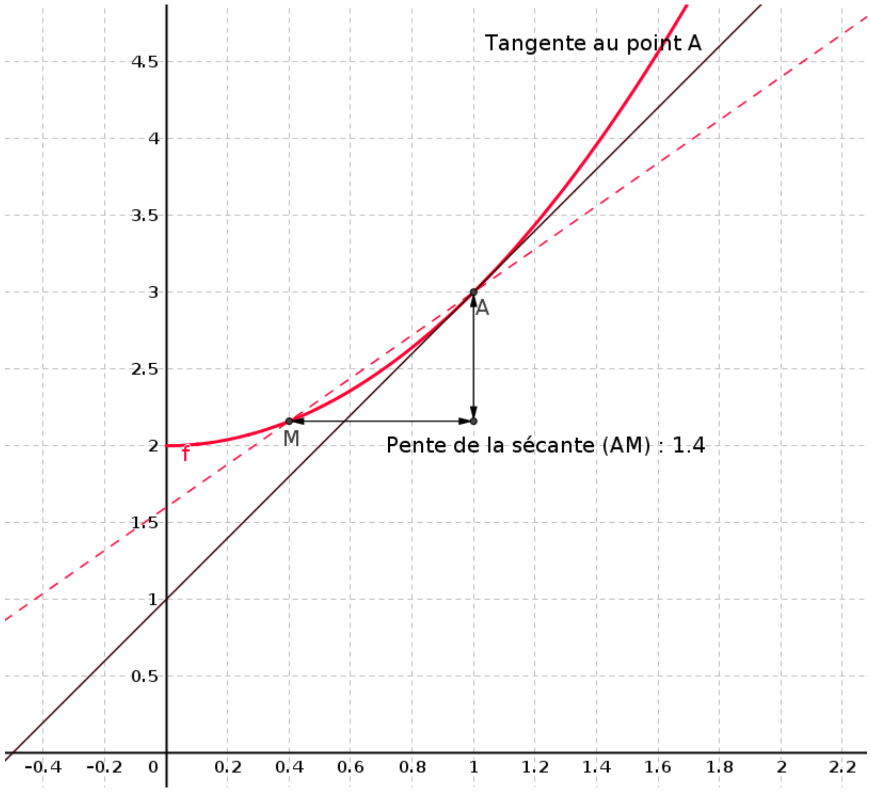
Activité 1

Une usine produit un engrais agricole. Le coût de production quotidien, en milliers d'euros, de x tonnes d'engrais est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0;20]$ par $C(x) = x^2 + 2$.
On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction C dans un repère orthogonal d'unités 2 carreaux pour 1 tonne en abscisse et 1 carreau pour 1 millier d'euros en ordonnée.
E, A et D sont les points de la courbe d'abscisses respectives 0, 1 et 2.

1. **a.** Calculer la variation absolue du coût de production $C(2) - C(1)$ entre des productions de 1 et 2 tonnes.

   b. Si la production passe de 1 à 2 tonnes, le taux de variation du coût par quantité produite est égal à $\dfrac{C(2)-C(1)}{2-1}$.
   Calculer ce taux. Que représente-t-il pour la droite (AD) ?

2. Calculer la variation absolue du coût de production $C(1) - C(0)$ et le taux de variation du coût par quantité produite $\dfrac{C(1)-C(0)}{1-0}$ si la production passe de 0 à 1 tonne.
   Que représente ce taux pour la droite (AE) ?



Pour tout réel $h \neq 0$ tel que $1+h \geqslant 0$, le taux de variation du coût par quantité produite, lorsque la production passe de 1 tonne à $1+h$ tonne est égal à $\boxed{\tau(h) = \dfrac{C(1+h)-C(1)}{1+h-1} = \dfrac{C(1+h)-C(1)}{h}}$.

À la question **1.** on a calculé $\tau(1)$ et à la question **2.** on a calculé $\tau(-1)$ (à vérifier ...).

Dans la feuille de calcul de tableur reproduite ci-dessous, on a calculé les valeurs du taux d'accroissement $\tau(h)$ pour des valeurs de h variant de -1 à 1 avec un pas de $0,1$.

	A	**B**	**C**	**D**
1	**h**	**1+h**	**C(1+h)-C(1)**	**(C(1+h) – C(1))/h**
2	-1	0	-1	1
...	...	...	...	...
9	-0,3	0,7	-0,51	1,7
10	-0,2	0,8	-0,36	1,8
11	-0,1	0,9	-0,19	1,9
12	0	1	0	#DIV/0!
13	0,1	1,1	0,21	2,1
14	0,2	1,2	0,44	2,2
15	0,3	1,3	0,69	2,3
...	...	...	...	...
22	1	2	3	3

3. **a.** Quelles formules a-t-on saisi en **A3**, **B2**, **C2** et **D2** pour compléter la feuille de calcul ?
Que signifie le message d'erreur en **D12** ?

b. Quelle conjecture peut-on faire sur les valeurs prises par le taux de variation
$\tau(h) = \dfrac{C(1+h)-C(1)}{1+h-1} = \dfrac{C(1+h)-C(1)}{h}$ lorsque h tend vers 0 ?
Quelle interprétation économique peut-on en donner ?

c. Si on note M_h le point de la courbe de la fonction C dont l'abscisse est $1+h$, que représente $\tau(h)$ pour la droite (AM_h) qui est sécante à la courbe ?

4. **a.** Tracer sur le graphique la droite $\mathcal{T}$ passant par $A(1;3)$ et de coefficient directeur 2 puis déterminer son équation.

b. Quel lien peut-on faire entre la droite $\mathcal{T}$ et les sécantes (AM_h) lorsque h tend vers 0 ?

c. Quel lien peut-on faire entre le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ et le taux d'accroissement $\tau(h)$ lorsque h tend vers 0 ?

1.2 Point de vue cinématique

Activité 2 ***Situation 3 page 113***

2 Point de vue local, fonction dérivable en un point

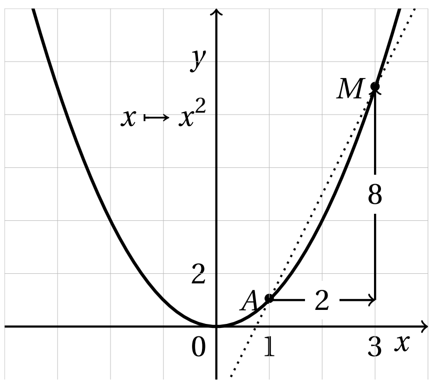
2.1 Taux de variation

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel appartenant à I et h un réel non nul tel que $a+h$ appartient à I.
Le **taux de variation** de f entre a et $a+h$ est le quotient :

$$\boldsymbol{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

C'est le coefficient directeur de la droite sécante à $\mathcal{C}_f$ passant par $A(a; f(a))$ et $M(a+h; f(a+h))$.
Pour exprimer le taux de variation d'une quantité y par rapport à une quantité x, on peut utiliser la notation $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.



Capacité 1 ***Déterminer un taux de variation***

On considère de nouveau la fonction coût de production définie dans l'activité 2.
Pour tout réel x appartenant à $[0;20]$ on a $C(x)=1+x^2$. Soit h un réel différent de 0 et tel que $1+h \geqslant 0$.

1. Démontrer que $C(1+h)-C(1)=2h+h^2$.

2. En déduire le taux de variation de la fonction C entre 1 et $1+h$.

Algorithmique 1

Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne le taux de variation d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ entre les réels a et a + h.

```
def tauxVariation(f, a, h):
    if ...... :
        return None   #calcul impossible
    else:
        return ..............
```

2.2 Nombre dérivé en un point d'une fonction

Histoire 2

Que sont ces fluxions ? Les vitesses d'incréments évanouissants, et que sont ces mêmes incréments évanouissants ? Ce ne sont ni des quantités infinies, ni des quantités infiniment petites, ni pourtant rien. Ne pouvons-nous les appeler les fantômes des quantités défuntes ?

Berkeley, *L'Analyste*, 1734, pamphlet contre le calcul différentiel

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel appartenant à I et h un réel différent de 0 tel que $a+h$ appartient à I.

f est dérivable en a si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, le taux de variation de f entre a et $a+h$, tend vers un nombre lorsque h tend vers 0.

Ce nombre est le **nombre dérivé** ou **dérivée** de f en a, il est noté $f'(a)$.

C'est la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0 et on note : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)}$.

Si $y=f(x)$ on peut utiliser la notation de Leibniz $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pour la dérivée $f'(x)$ de f en x.

Remarque 1

- Si un coût de production est modélisé par une fonction $C : q \mapsto C(q)$, alors le taux de variation $C_M(a) = (C(a+1)-C(a))/1$ représente le coût de production d'une unité supplémentaire pour a unités déjà produites. Pour une production continue (en litres ...), si C est dérivable en a alors on peut prendre la dérivée $C'(a)$ comme approximation du coût marginal en a, qu'on interprète comme le taux de variation instantané du coût de production. Un profit n'est réalisé que si le coût marginal est inférieur au prix de vente, un profit est optimal si le prix de vente est égal au coût marginal.

- Si la loi horaire d'un mobile est modélisée par une fonction $d : t \mapsto d(t)$, la vitesse moyenne du mobile entre les instants t et $t+h$ est donnée par le taux de variation $\dfrac{d(t+h)-d(t)}{h}$. Si d est dérivable en a, $d'(a)$ s'interprète comme la vitesse instantanée du mobile à l'instant a.

Capacité 2 ***Déterminer un nombre dérivé à partir de la définition***

1. Démontrer que la fonction coût de production C définie dans l'activité 1 est dérivable en 1 et déterminer son nombre dérivé.
2. On lance un caillou du haut d'un point. La distance parcourue par le caillou au bout de t secondes avant de toucher le sol est $d(t) = 4,9t^2$.

   Calculer la vitesse instantanée du caillou au bout de 2 secondes.
3. On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
   a. Démontrer que pour tout réel $h>-3$, on a $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = -\dfrac{1}{3(3+h)}$.
   b. La fonction f est-elle dérivable en 3 ?
4. Soit la fonction $f : x \mapsto 2x-1$ définie sur $\mathbb{R}$.
   a. Démontrer que pour tout réel a et pour tout réel $h \neq 0$, le taux de variation de f entre a et $a+h$ est égal à 2.
   b. En déduire que la fonction f est dérivable en tout réel a.

2.3 Tangente à la courbe d'une fonction dérivable

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit a un réel appartenant à I et h un réel non nul tel que $a+h$ appartient à I.
On considère les points $A\left(a\,;f(a)\right)$ et $M_h\left(a+h\,;f(a+h)\right)$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan.
Si **f est dérivable en** a, lorsque h tend vers 0, les sécantes (AM_h) à $\mathscr{C}_f$ tendent vers une position limite qui est la droite passant par le point $\mathrm{A}\left(a\,;f(a)\right)$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Cette droite, « **limite des sécantes** », est appelée **tangente à $\mathscr{C}_f$ en $\mathrm{A}\left(a\,;f(a)\right)$**.

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable en a, une équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$\boxed{\boldsymbol{y = f'(a)(x-a)+f(a)}}$$

Démonstration ***voir page 119***

....

....

....

....

....

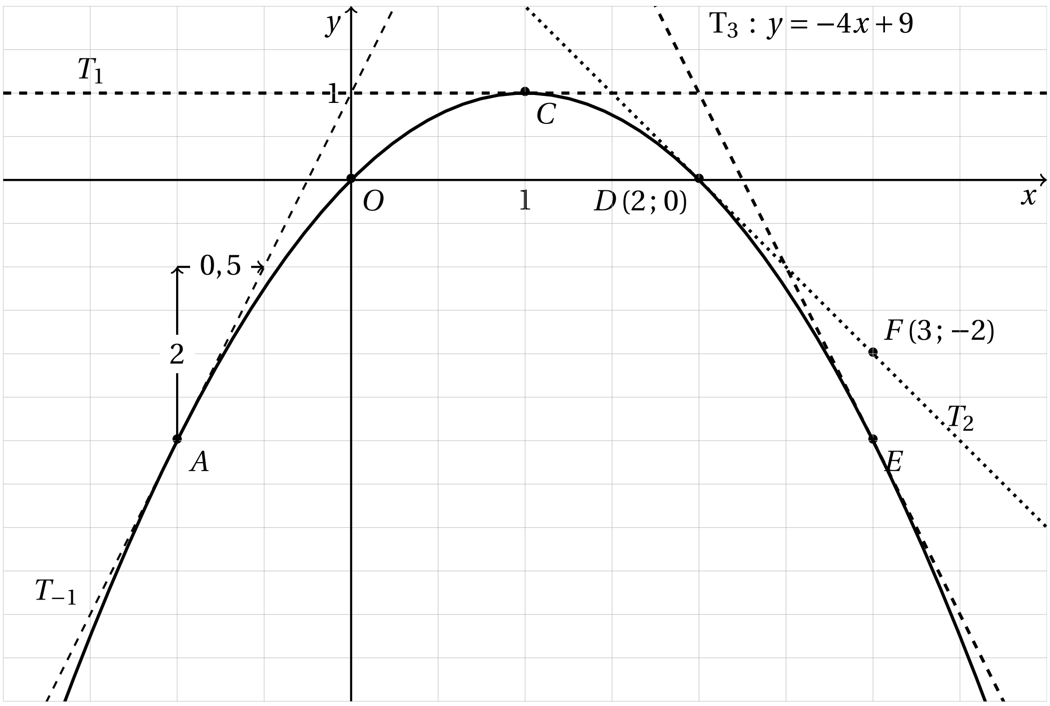
....

....

Capacité 3 ***Déterminer une équation de tangente***

Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe de la fonction coût de production C définie dans l'activité 1.

Capacité 4 ***Déterminer graphiquement un nombre dérivé et une équation de tangente***



Sur le graphique précédent, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-2;4]$ par $f(x) = -x^2+2x$.

On admet que f est dérivable en -1, 0, 1, 2 et 3 et on a tracé les tangentes à $\mathscr{C}_f$:

- T_1 au point $C(1;1)$;
- T_{-1} au point $A(-1;-3)$;
- T_2 au point $D(2;0)$;
- T_3 au point $E(3;-3)$;

1. Avec les éléments présents sur le graphique, déterminer les nombres dérivés $f'(1)$, $f'(-1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$ puis les équations réduites des tangentes T_1, T_{-1}, T_2 et T_3.

2. Soit h un réel non nul, vérifier que $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = -h+2$, faire tendre h vers 0 et en déduire le nombre dérivé de f en 0.

3. Représenter graphiquement la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point $O(0;0)$ et déterminer son équation réduite.

Capacité 5 ***Tangente à une droite***

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x-1$ définie sur $\mathbb{R}$. Dans la capacité 2, on a démontré que pour tout réel a, f est dérivable en a et que $f'(a) = 2$.

1. Pour tout réel a, déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe de f dans un repère du plan.

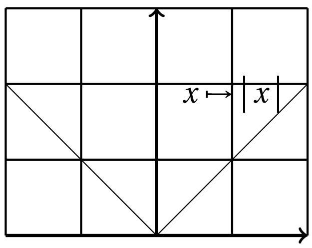
2. Ce résultat vous surprend-il ?

2.4 Dérivabilité des fonctions valeur absolue et racine carré

Propriété 2

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$



Pour tout réel x, la valeur absolue de x est notée $|x|$.

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Démonstration

Algorithmique 2

1. Démontrer que pour tout réel $h \geqslant -4$, on a $\dfrac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}}$.

   Faire tendre h vers 0 et en déduire que la fonction racine carrée est dérivable en 5.

2. Compléter le programme `Python` ci-dessous pour qu'il affiche les taux de variation de entre $\sqrt{0+h}$ et $\sqrt{0}$ pour h prenant des valeurs 10^{-k} avec k variant entre 1 et 9 :

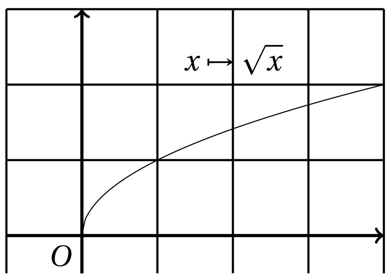
```
from math import sqrt

for k in range(1 , 10):
    h = 10 ** -k
    print("h=", h, "taux(h)=", ..................................)
```

3. Après exécution, on obtient ces résultats :

```
h= 0.1 taux(h)= 3.162277660168379
h= 0.01 taux(h)= 10.0
..................................
h= 1e-08 taux(h)= 10000.0
h= 1e-09 taux(h)= 31622.776601683792
```

   Quelle conjecture peut-on faire sur la dérivabilité de la fonction racine carrée en 0 ?

Propriété 3



Pour tout réel $x \geqslant 0$, la racine carré de x est l'unique réel positif noté $\sqrt{x}$ tel que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
La fonction racine carré est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

....

Démonstration *détaillée p. 118*

....

....

....

....

....

....