

■ Exercice 1. Devoir commun Décembre 2022

Une entreprise fabrique et commercialise entre 2 et 10 tonnes par mois d'un alliage métallique. On suppose qu'en un mois l'entreprise vend toute la production qu'elle a fabriqué et que le prix d'une tonne d'alliage est 50 000 euros.

On modélise le **coût** total de production de x tonnes, en milliers d'euros, par une fonction f . L'égalité $f(2) = 100$ signifie que la production de 2 tonnes d'alliage a un coût de 100 000 euros. Le **bénéfice** est la **différence** entre la **recette** et le **coût** de production.

Partie A - Étude graphique

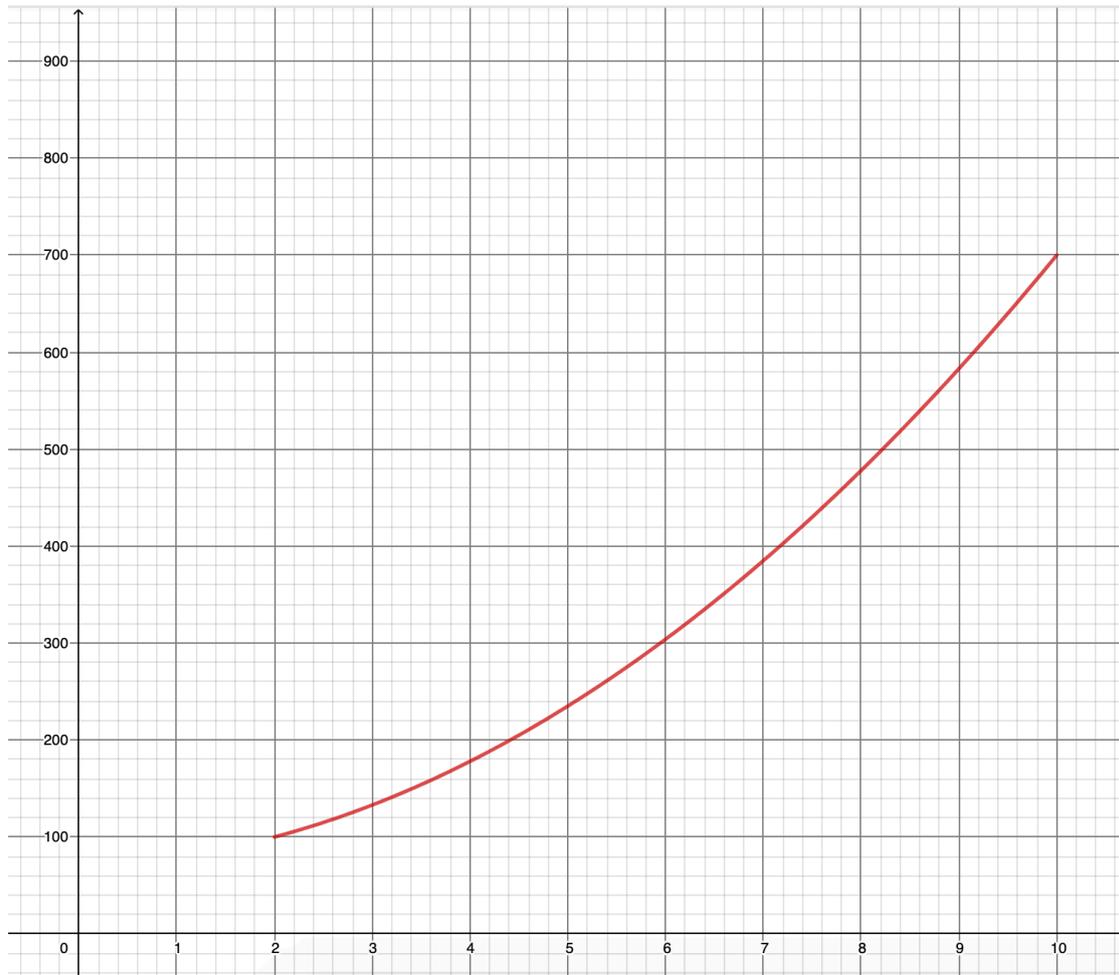
On donne en annexe page 9 la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f .

- Déterminer graphiquement $f(4)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- On suppose qu'en un mois l'entreprise fabrique 4 tonnes d'alliage.
 - Quelle est sa recette?
 - L'entreprise réalise-t-elle un bénéfice strictement positif? Justifier la réponse.
- Justifier que la recette de l'entreprise, en milliers d'euros, pour x tonnes fabriquées et vendues est $R(x) = 50x$, pour $x \in [2; 10]$.
 - Représenter avec soin la fonction R sur la figure donnée en annexe.
 - Conjecturer les valeurs de x pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice strictement positif.

Partie B - Étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[2; 10]$ par $f(x) = 6x^2 + 3x + 70$.

- Calculer $f(4)$ et comparer ce résultat à la réponse donnée à la question 1. de la Partie A.
- En justifiant, déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[2; 10]$.
- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[2; 10]$, le bénéfice $B(x)$ réalisé par l'entreprise pour x tonnes fabriquées et vendues est $B(x) = -6x^2 + 47x - 70$.
 - Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice strictement positif.



■ Exercice 2. Suite du traiteur paresseux

La *suite du traiteur paresseux*, est une suite de nombres donnant le nombre maximum de morceaux d'un disque (une crêpe ou une pizza est généralement utilisée pour décrire la situation) qui peut être obtenu avec un certain nombre de coupes droites. Par exemple, trois coupes à travers une crêpe produiront six

morceaux si les traits de coupe se rencontrent en un même point intérieur au disque, mais jusqu'à sept dans le cas contraire.

On admet que pour un nombre n de coupes droites qui est un entier naturel, le nombre maximal de morceaux d'un disque qu'on peut découper est :

$$p(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

1. Dans cette question, on démontre par disjonction des cas que pour tout entier naturel n , $n^2 + n + 2$ est divisible par 2 et donc que $p(n)$ est bien défini.

- Supposons qu'un entier naturel n est pair c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel p tel que $n = 2p$. Démontrer que $n^2 + n + 2$ est pair.
- Supposons qu'un entier naturel n est impair c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel p tel que $n = 2p + 1$. Démontrer que $n^2 + n + 2$ est pair.
- Conclure que pour tout entier naturel n , $n^2 + n + 2$ est divisible par 2 et donc que $p(n)$ est bien défini.

2. Déterminer l'entier naturel n tel que $p(n) = 1\,601\,156$.

3. Dans le DM n°2, on a introduit les nombres triangulaires $t(n)$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $t(n)$ est égal à la somme des entiers successifs $1 + 2 + 3 + \dots + n$. On admet pour l'instant (démonstration plus tard dans l'année) que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $t(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$p(n) = t(n) + 1$$

b. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie le nombre triangulaire $t(n)$ en utilisant uniquement des additions (multiplication interdite).

```
def triangulaire(n):  
    t = 0  
    for k in range(1, .....):  
        .....  
    return t
```

c. Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie le nombre maximal $p(n)$ de parts de disques avec n coupes droites, en utilisant uniquement des additions (multiplication interdite).

```
def traiteur_paresseux(n):  
    .....  
    .....  
    .....  
    .....
```