Exercice 1 *Encadrement du zéro d'une fonction par dichotomie*

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;2]$ et l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $[1;2]$ qu'on note $\sqrt{2}$.

On souhaite déterminer une *solution approchée* de $\sqrt{2}$, par un *algorithme de dichotomie* dont le principe, est celui du jeu *Juste prix.*

Dans ce jeu on doit deviner le prix d'un objet choisi par l'ordinateur entre deux bornes : $0 < \text{Prix} < 32$ € par exemple.

- Si ma proposition est 16 et que l'ordinateur répond « *C'est moins* » alors $0 < \text{Prix} < 16$
- Si ma proposition est 8 et que l'ordinateur répond « *C'est plus* » alors $8 < \text{Prix} < 16$
- Si ma proposition est 12 et que l'ordinateur répond « *C'est plus* » alors $12 < \text{Prix} < 16$
- etc ...

On donne une fonction `dichotomie(epsilon)` qui renvoie deux réels a et b tels que :
$a \leqslant \sqrt{2} \leqslant b$ et $b - a \leqslant \texttt{epsilon}$.

Algorithme

Fonction `dichotomie(epsilon)`
- `a` $\longleftarrow$ 1.
- `b` $\longleftarrow$ 2.
- Tant que `b` $-$ `a` $>$ `epsilon`
  - `m` $\longleftarrow \frac{1}{2}$(`a` + `b`).
  - Si `m`$^2 > 2$ alors `b` $\longleftarrow$ `m`.
  - Sinon `a` $\longleftarrow$ `m`.
  - Fin de Si.
- Fin de Tant que.
- Retourner (a,b)

Python

```python
def dichotomie(epsilon):
    a = 1
    b = 2
    while ............... :
        ...................
        ...................
        ...................
        ...................
        ...................
    ........................
```

1. Dérouler l'appel de fonction `dichotomie(0.05)` en complétant le tableau ci-dessous.

   Chaque exécution du corps de la boucle Tant Que constitue une étape où l'état des variables est relevé à la fin de l'itération, après l'exécution de l'instruction conditionnelle. Pour a et b il s'agit donc des valeurs en sortie de boucle et non des valeurs en entrée de boucle.

	initialisation	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5	étape 6
m	$\varnothing$	1,5					
a	1						
b	2						
$b-a$	1						

2. Compléter ci-dessus l'implémentation en `Python` de la fonction `dichotomie`.

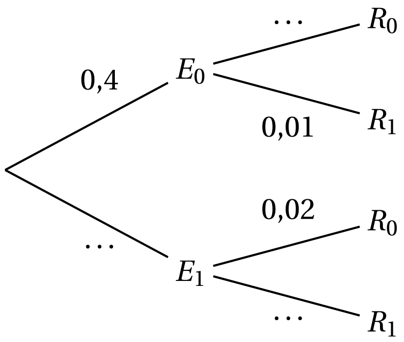
3. Tester cette fonction dans ce carnet Python https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/e64f-120353 (authentfication avec les identifiants ENT).

   Quel est le couple de valeurs renvoyé par l'appel `dichotomie(0.001)` ?

Exercice 2 *Nouvelle-Calédonie Octobre 2022*

On considère un système de communication binaire transmettant des 0 et des 1.
Chaque 0 ou 1 est appelé bit.
En raison d'interférences, il peut y avoir des erreurs de transmission :
un 0 peut être reçu comme un 1 et, de même, un 1 peut être reçu comme un 0.
Pour un bit choisi au hasard dans le message, on note les évènements :

- E_0 : « le bit envoyé est un 0 » ;
- E_1 : « le bit envoyé est un 1 » ;
- R_0 : « le bit reçu est un 0 »
- R_1 : « le bit reçu est un 1 ».



On sait que :
$p(E_0) = 0,4$; $p_{E_0}(R_1) = 0,01$; $p_{E_1}(R_0) = 0,02$.
On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $p_B(A)$.
On peut ainsi représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessus.

1. La probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0 est égale à :

a. 0,99 **b.** 0,396 **c.** 0,01 **d.** 0,4

2. La probabilité $p(R_0)$ est égale à :

a. 0,99 **b.** 0,02 **c.** 0,408 **d.** 0,931

3. Une valeur, approchée au millième, de la probabilité $p_{R_1}(E_0)$ est égale

a. 0,004 **b.** 0,001 **c.** 0,007 **d.** 0,010

4. La probabilité de l'évènement « il y a une erreur de transmission » est égale à :

a. 0,03 **b.** 0,016 **c.** 0,16 **d.** 0,015

Un message de longueur huit bits est appelé un octet.
On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

5. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.

La probabilité, qu'exactement 1 octet soit transmis sans erreur est égale à :

a. $0,88 \times 0,12^9$ **b.** $0,88$ **c.** $10 \times 0,88 \times 0,12^9$ **d.** $0,88 + 0,12^9$

6. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.

La probabilité, qu'exactement 2 octets soit transmis sans erreur est égale à :

a. $0,88^2 \times 0,12^8$ **b.** $10 \times 9 \times 0,88^2 \times 0,12^8$ **c.** $5 \times 9 \times 0,88^2 \times 0,12^8$ **d.** $0,88^2 + 0,12^8$

7. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.

La probabilité qu'au moins 1 octet soit transmis sans erreur est égale à :

a. $1-0,12^{10}$ **b.** $0,12^{10}$ **c.** $0,88^{10}$ **d.** $1-0,88^{10}$

8. Soit N un entier naturel. On transmet successivement N octets de façon indépendante.

Soit N_0 la plus grande valeur de N pour laquelle la probabilité que les N octets soient tous transmis sans erreur est supérieure ou égale à $0,1$.

On peut affirmer que :

a. $N_0 = 17$ **b.** $N_0 = 18$ **c.** $N_0 = 19$ **d.** $N_0 = 20$

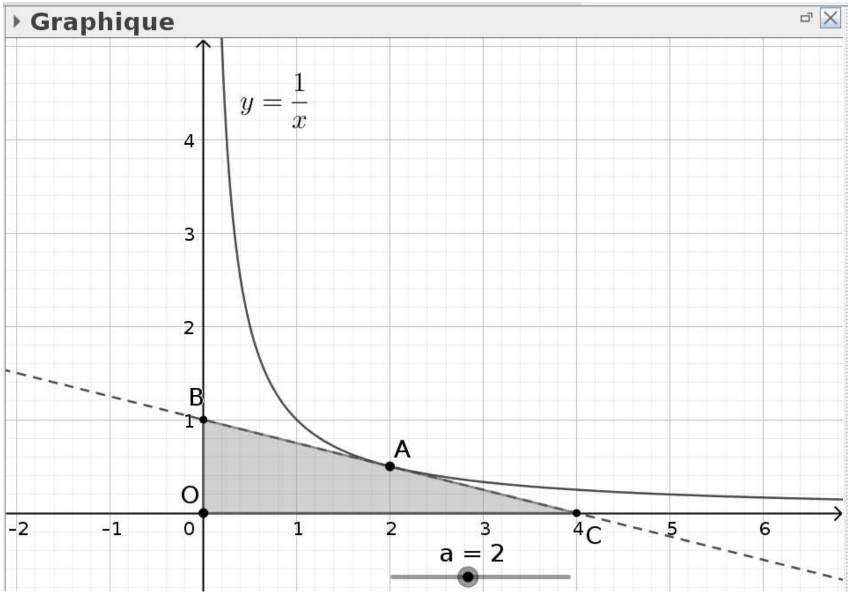
Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty]$.

On a représenté ci-dessous la courbe de f dans un repère orthonormal du plan et sa tangente au point d'abscisse 2.

On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Au point A d'abscisse $a>0$, on trace la tangente à la courbe de f qui coupe l'axe des abscisses au point C et l'axe des ordonnées au point B.



Tableur

	A	B	C	D
1	x(A)	y(A)	Aire de OBC	
2	2.5	0.4	2	
3	2	0.5	2	
4	1.5	0.67	2	
5	1	1	2	
6	1.5	0.67	2	
7	2	0.5	2	
8	2.5	0.4	2	
9	2	0.5	2	
10	1.5	0.67	2	
11	2	0.5	2	
12				
13				
14				
15				

1. Dans cette question l'abscisse de A est $a=2$.

a. Par lecture graphique déterminer le nombre dérivé de f en 2.

b. Soit un réel $h>-2$, justifier que $f(2+h)-f(2)=\dfrac{-h}{2(2+h)}$ et en déduire la valeur exacte de $f'(2)$

c. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 et en déduire l'aire du triangle rectangle OBC.

2. Dans cette question l'abscisse de A est un réel $a>0$.

On admet que pour tout réel $a>0$, on a $f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}$.

a. D'après la capture d'écran de tableur fournie ci-dessus, quelle conjecture peut-on faire sur l'aire du triangle OBC, lorsque l'abscisse a du point A varie dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$?

b. Démontrer cette conjecture.

Exercice 4

Monsieur Cornu dirige une usine qui fabrique et vend un produit chimique. Il veut étudier la rentabilité de cette activité sur une semaine.

On suppose que tout le produit chimique fabriqué est vendu.

- La quantité x (en tonnes) de produit fabriqué en une semaine appartient à l'intervalle $[0\,;\,20]$;
- Le coût de fabrication de x tonnes de produit avec $x \in [0\,;\,20]$ est (en centaines d'euros) :

$$C(x) = 2x^2 - 26x + 102$$

- la vente d'une tonne de produit rapporte 1 400 euros.

Pour une quantité de produit le bénéfice est la différence entre la recette et le coût de fabrication.

1. Soit $R(x)$ la recette en centaines d'euros réalisée pour la fabrication et la vente en une semaine, d'une quantité $x \in [0\,;\,20]$ de produit. Justifier que $R(x) = 14x$.
2. Vérifier que le bénéfice en centaines d'euros réalisé pour la fabrication et la vente de x tonnes de produit est :
$$B(x) = -2x^2 + 40x - 102$$
3. Résoudre par le calcul l'inéquation $B(x) > 0$ et déterminer la quantité de produit qu'il faut fabriquer pour réaliser un bénéfice strictement positif.