

Exercice 1 Encadrement du zéro d'une fonction par dichotomie

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur \mathbb{R} .

f est strictement croissante sur l'intervalle $[1; 2]$ et l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $[1; 2]$ qu'on note $\sqrt{2}$.

On souhaite déterminer une *solution approchée* de $\sqrt{2}$, par un *algorithme de dichotomie* dont le principe, est celui du jeu *Juste prix*.

Dans ce jeu on doit deviner le prix d'un objet choisi par l'ordinateur entre deux bornes : $0 < \text{Prix} < 32 \text{ €}$ par exemple.

- Si ma proposition est 16 et que l'ordinateur répond « *C'est moins* » alors $0 < \text{Prix} < 16$
- Si ma proposition est 8 et que l'ordinateur répond « *C'est plus* » alors $8 < \text{Prix} < 16$
- Si ma proposition est 12 et que l'ordinateur répond « *C'est plus* » alors $12 < \text{Prix} < 16$

• etc...

On donne une fonction `dichotomie(epsilon)` qui renvoie deux réels a et b tels que :
 $a \leq \sqrt{2} \leq b$ et $b - a \leq \text{epsilon}$.

Algorithme

```
Fonction dichotomie(epsilon)
  a ← 1.
  b ← 2.
  Tant que b - a > epsilon
    m ←  $\frac{1}{2}(a + b)$ .
    Si  $m^2 > 2$  alors b ← m.
    Sinon a ← m.
  Fin de Si.
  Fin de Tant que.
  Retourner (a,b)
```

Python

```
def dichotomie(epsilon):
    a = 1
    b = 2
    while b - a > epsilon:
        m = (a + b) / 2
        if m ** 2 > 2:
            b = m
        else:
            a = m
    return (a, b)
```

1. Dérouler l'appel de fonction `dichotomie(0.05)` en complétant le tableau ci-dessous.

Chaque exécution du corps de la boucle Tant Que constitue une étape où l'état des variables est relevé à la fin de l'itération, après l'exécution de l'instruction conditionnelle. Pour a et b il s'agit donc des valeurs en sortie de boucle et non des valeurs en entrée de boucle.

	initialisation	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5	étape 6
m	\emptyset	1,5	1,25	1,375	1,4375	1,40625	
a	1	1	1,25	1,375	1,375	1,40625	
b	2	1,5	1,5	1,5	1,4375	1,4375	
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	

2. Voir ci-dessus l'implémentation en Python de la fonction dichotomie.
3. Testons cette fonction dans ce carnet Python <https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/e64f-120353> (authentification avec les identifiants ENT).

Le couple de valeurs renvoyé par l'appel `dichotomie(0.001)` est (1.4140625, 1.4150390625).