1 Partie A

Dans un repère orthonormal du plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on considère les points A et B de coordonnées :

$$A(3;0) \quad B(0;4)$$

1. Faire une figure.

2. $\overrightarrow{AB}\,(0-3;4-0)$ donc d'après la formule du carré scalaire $AB^2=(-3)^2+4^2=9+16=25$. De plus AB est une longueur donc $AB \geqslant 0$ donc $\boxed{AB=5}$.

3. La droite Δ d'équation $y=\dfrac{3}{4}x$ passe par l'origine du repère $O(0;0)$ et le point $D(4;3)$.

4. Soit $M\left(x;\dfrac{3}{4}x\right)$ un point de la droite Δ tel que $x \geqslant 0$. On appelle H le projeté orthogonal de M sur (OA) et K le projeté orthogonal de M sur (OB).

a. Représenter sur la figure les points M, H et K pour $x=2$.

b. Pour calculer l'aire d'un triangle on applique la formule $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.

L'aire du triangle OMB est égale à $\boxed{\dfrac{MK \times OB}{2}=\dfrac{x\times 4}{2}}$.

L'aire du triangle OMA est égale à $\boxed{\dfrac{MH \times OA}{2}=\dfrac{\frac{3}{4}x\times 3}{2}}$.

Le rapport des aires des triangles OMB et OMA est donc égal à :

$$\boxed{\dfrac{\frac{x\times 4}{2}}{\frac{\frac{3}{4}x\times 3}{2}}=\dfrac{4^2}{3^2}=\dfrac{OB^2}{OA^2}}$$

5. a. On a $x_A \neq x_B$ donc la droite (AB) admet une équation de la forme $y=mx+p$.

D'une part $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{4-0}{0-3}=-\dfrac{4}{3}$.

D'autre part $y_B=mx_B+p \iff 4=m\times 0+p \iff y_B=p$.

Une équation de (AB) est donc $\boxed{y=-\dfrac{4}{3}x+4}$.

b. Les coefficients directeurs des droites Δ et (AB) sont distincts donc elles sont sécantes.

Les coordonnées (x,y) de leur point d'intersection C intersection forment un couple solution du système :

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x \\ y=-\dfrac{4}{3}x+4 \end{cases}$$

On résout ce système par équivalences :

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x \\ y=-\dfrac{4}{3}x+3 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x \\ \dfrac{3}{4}x=-\dfrac{4}{3}x+4 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x \\ \dfrac{25}{12}x=3 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\dfrac{3}{4}x \\ x=\dfrac{4\times 12}{25}=1{,}92 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1{,}44 \\ x=1{,}92 \end{cases}$$

On en déduit que $\boxed{C(1{,}92;1{,}44)}$.

6. Pour la suite de l'exercice, on admet que le point C a pour coordonnées $C\,(1,92\,;\,1,44)$.

a. Démontrons que les droites $(OC) = \Delta$ et (AB) sont perpendiculaires.
D'une part on a $\overrightarrow{OC}\,(1,92\,;\,1,44)$.
D'autre part on a $\overrightarrow{AB}\,(-3\,;\,4)$.
On en déduit que le produit scalaire $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$ est égal à $-3\times1,92+4\times1,44=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont donc orthogonaux et les droites (AB) et (OC) qu'ils dirigent sont donc perpendiculaires.

b. Soit x un réel et $M\left(x\,;\,\frac{3}{4}x\right)$ un point de la droite Δ.
On a $\overrightarrow{MC}\left(1,92-x\,;\,1,44-\frac{3}{4}x\right)$.
D'après la formule du carré scalaire et sachant que $1,44=\frac{3}{4}\times1,92$, on en déduit que :

$$CM^2=(1,92-x)^2+(\frac{3}{4}\times1,92-\frac{3}{4}x)^2$$
$$CM^2=(1,92-x)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\times(1,92-x)^2$$
$$CM^2=(1+\left(\frac{3}{4}\right)^2)\times(1,92-x)^2$$
$$CM^2=x^2-3,84x+1,92^2+\frac{9}{16}x^2-2.16x+\left(\frac{3}{4}\times1,92\right)^2$$
$$CM^2=1,92^2+1,44^2-6x+\frac{25}{16}x^2$$

Pour tout réel on a donc bien, $\boxed{CM^2=1,92^2+1,44^2-6x+\frac{25}{16}x^2}$.

c. Déterminons les coordonnées du point E de la droite Δ tel que si on note x son abscisse alors :

$$CE=\frac{5}{4}x$$

Résoudre ce problème équivaut à résoudre l'équation :

$$\left(\frac{5}{4}x\right)^2=1,92^2+1,44^2-6x+\frac{25}{16}x^2\iff1,92^2+1,44^2-6x=0$$
$$\left(\frac{5}{4}x\right)^2=1,92^2+1,44^2-6x+\frac{25}{16}x^2\iff x=\frac{1,92^2+1,44^2}{6}=0,96$$

On en déduit que $x_E=0,96$. De plus E appartient à Δ donc $y_E=\frac{3}{4}x_E=0,96\times\frac{3}{4}=0,72$.
On a donc $\boxed{E\,(0,96\,;\,0,72)}$.

7. Pour la suite de l'exercice, on admet que le point E a pour coordonnées $E\,(0,96\,;\,0,72)$.

a. Puisque E et C appartiennent à Δ et que $E\neq C$, on a $(EC)=\Delta$ et comme $\Delta\perp(AB)$, on en déduit que $(EC)\perp(AB)$. De plus C appartient à (AB), on peut donc en déduire que C est le pied de la hauteur issue de E dans le triangle EAB.

b. Pour calculer l'aire d'un triangle on applique la formule $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.

L'aire du triangle EAB est égale à $\boxed{\dfrac{AB \times EC}{2} = \dfrac{5 \times \frac{5}{4} \times x_E}{2}}$.

L'aire du triangle OEB est égale à $\boxed{\dfrac{OB \times x_E}{2} = \dfrac{4x_E}{2}}$.

Le rapport des aires des triangles OEB et EAB est donc égal à :

$$\boxed{\frac{\frac{5 \times \frac{5}{4} \times x_E}{2}}{\frac{4x_E}{2}} = \frac{25}{16} = \frac{AB^2}{OB^2}}$$

2 Partie B

2.1 Résolution en lien avec la partie A

Trois propriétaires $P1$, $P2$ et $P3$ disposent chacun d'une parcelle de terrain carrée jouxtant un lac triangulaire RST rectangle en R tel que $RS = 300$ mètres et $RT = 400$ mètres.
Ils décident de délimiter leurs *eaux territoriales* en plaçant une bouée U dans le lac de telle sorte que les mesures des surfaces des triangles RUS, RUT et UST soient proportionnelles aux aires des parcelles adjacentes (carrés de côtés RS, RT et ST).

On reconnaît une situation équivalente à celle de la partie A où $R = O$, $S = A$, $T = B$ si on choisit le repère orthonormal $\left(R, \dfrac{1}{300}\overrightarrow{RS}, \dfrac{1}{400}\overrightarrow{RT}\right)$ puisque les coordonnées dans ce repère correspondent à celles de la partie A : $R\,(0;0)$, $S\,(3;0)$ et $T\,(0;4)$.

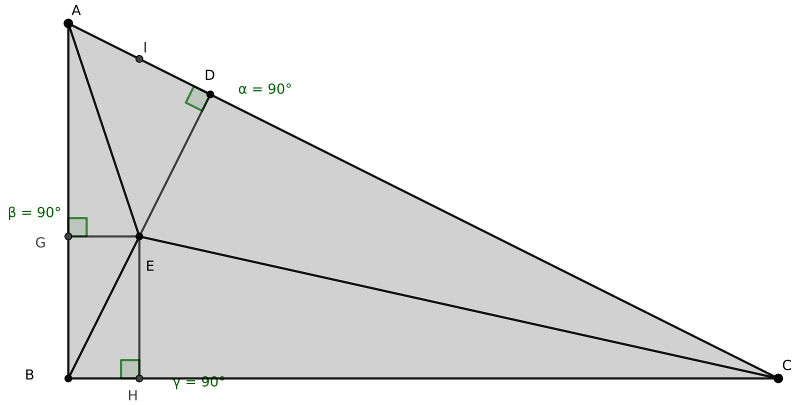
D'après la partie A, le point U de coordonnées $(0,96;1,44)$ est tel que :

- le rapport des aires des triangles RUT et RUS est égal à $\dfrac{RT^2}{RS^2}$ qui est le rapport des aires des propriétaires des parcelles carrées jouxtant les côtés $[RT]$ et $[RS]$.
- le rapport des aires des triangles SUT et RUT est égal à $\dfrac{ST^2}{RT^2}$ qui est le rapport des aires des propriétaires des parcelles carrées jouxtant les côtés $[ST]$ et $[RT]$.

Les aires des triangles RUT, RUS, et SUT seront donc proportionnelles aux aires des parcelles carrées jouxtant les côtés $[RT]$, $[RS]$ et $[ST]$.
Le point U est donc celui où il faut placer la bouée. En grandeurs réelles, si on appelle H le projeté orthogonal de U sur le côté $[RS]$, on aura $RH = 0,96 \times 100 = 96$ mètres et $HU = 0,72 \times 100 = 72$ mètres.

2.2 Résolution dans le cas général

Considérons un triangle ABC rectangle en A. On veut placer à l'intérieur de ABC un point E tel que les aires des triangles EAB, EBC et EAC soient proportionnelles aux aires des carrés des côtés AB^2, BC^2 et AC^2.



On raisonne par Analyse et Synthèse.

☞ **Étape 1 : Analyse, preuve de l'unicité d'une solution**

On suppose qu'il existe un point E à l'intérieur de ABC tel que les aires des triangles EAB, EBC et EAC soient proportionnelles aux aires des carrés des côtés AB^2, BC^2 et AC^2 et on s'appuie sur la figure précédente.

On va démontrer que E est nécessairement le milieu de $[BD]$.

On considère le projeté orthogonal G de E sur $[AB]$ et le le projeté orthogonal H de E sur $[BC]$. Le quadrilatère $BGEH$ est donc un rectangle.

L'aire du triangle EAB est $\dfrac{AB \times EG}{2}$ et l'aire du triangle EBC est $\dfrac{EH \times BC}{2}$.

Si les aires de EAB et EBC sont proportionnelles aux carrés AB^2, BC^2 alors :

$$\frac{\frac{AB \times EG}{2}}{AB^2} = \frac{\frac{EH \times BC}{2}}{BC^2} \iff \frac{EG}{AB} = \frac{EH}{BC} \iff \frac{BC}{AB} = \frac{EH}{EG} \iff EG \times BC = EH \times AB$$

On en déduit que dans un repère orthonormal d'origine B et de base $\left(\dfrac{1}{BC}\overrightarrow{BC}, \dfrac{1}{AB}\overrightarrow{BA}\right)$ on a $\overrightarrow{BE}\ (EG; EH)$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}\ (BC; -AB)$ car le produit scalaire des vecteurs est nul :

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AB} = EG \times BC - EH \times AB = 0$$

Par conséquent E appartient à la hauteur de ABC issue de B dont le pied est D.

Si les aires de EAC et EAB sont proportionnelles aux carrés AB^2, AC^2 alors :

$$\frac{\frac{AB \times EG}{2}}{AB^2} = \frac{\frac{ED \times AC}{2}}{AC^2} \iff \frac{EG}{AB} = \frac{ED}{AC} \iff \frac{AC}{AB} = \frac{ED}{EG}$$

Or ABC rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \iff \frac{AC^2}{AB^2} = 1 + \frac{BC^2}{AB^2}$$

On peut substituer $\dfrac{ED}{EG}$ à $\dfrac{AC}{AB}$ et $\dfrac{EH}{EG}$ à $\dfrac{BC}{AB}$:

$$\frac{ED^2}{EG^2} = 1 + \frac{EH^2}{EG^2} \iff ED^2 = EG^2 + EH^2$$

Or dans le rectangle $BGEH$ on a d'après le théorème de Pythagore dans BEH, avec $BH = EG$: $BE^2 = EG^2 + EH^2$.

De $BE^2 = EG^2 + EH^2$ et $ED^2 = EG^2 + EH^2$ on déduit que $EB = ED$.

Comme E, B et D alignés, on en déduit que le point E qui partage ABC en trois triangles d'aires proportionnelles aux carrés des côtés est nécessairement le milieu de $[BD]$.

☞ **Étape 2 : Synthèse, preuve de l'existence d'une solution**

Soit D le pied de la hauteur issue de B dans le triangle rectangle en B ABC et soit E le milieu de $[BD]$.

On va démontrer que E est bien une solution du problème, il suffit de reprendre le raisonnement de l'Analyse sachant que les différentes étapes de raisonnement sont en fait des équivalences.

Dans le rectangle $BGEH$ on a $\dfrac{EH}{BH} = \dfrac{BG}{EG}$.

De plus puisque les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux on a $\dfrac{EH}{BH} = \dfrac{BG}{EG} = \dfrac{BC}{AB}$ (égalité (1) même raisonnement que dans l'analyse avec le produit scalaire).

On en déduit que (avec $BG = EH$) :

$$\frac{\frac{AB\times EG}{2}}{AB^2} = \frac{AB \times BG \times AB/BC}{2AB^2} = \frac{BG}{2BC} = \frac{BG \times BC/2}{BC^2} = \frac{EH \times BC/2}{BC^2}$$

Ainsi les aires des triangles EAB et EBC sont proportionnelles aux aires des carrés de côtés AB^2 et BC^2.

Ensuite on applique le théorème de Pythagore dans EBH rectangle en H en remplaçant EB par ED puisque E est le milieu de $[BD]$ et BH par $EG = BH$.

$$BE^2 = BH^2 + EH^2 \iff ED^2 = EG^2 + EH^2 \iff \frac{ED^2}{EG^2} = 1 + \frac{EH^2}{EG^2}$$

Ensuite on utilise $\dfrac{EH^2}{EG^2} = \dfrac{BC^2}{AB^2}$ (cf égalité (1)) et le théorème de Pythagore dans ABC, on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \iff \frac{AC^2}{AB^2} = 1 + \frac{BC^2}{AB^2} \iff \frac{AC^2}{AB^2} = 1 + \frac{EH^2}{EG^2}$$

On déduit des deux dernières égalités que :

$$\frac{ED^2}{EG^2} = \frac{AC^2}{AB^2} \iff \frac{ED}{EG} = \frac{AC}{AB}$$

En raisonnant comme précédemment on en déduit que les aires des triangles EAC et EBC sont proportionnelles aux aires des carrés de côtés AC^2 et AB^2.

$$\frac{\frac{AB\times EG}{2}}{AB^2} = \frac{AB \times ED \times AB/AC}{2AB^2} = \frac{ED}{2AC} = \frac{ED \times AC/2}{AC^2}$$

Finalement, le point E milieu de $[BD]$ permet bien de partager le triangle rectangle en B ABC en trois triangles d'aires proportionnelles aux carrés des côtés.