Activité d'introduction

Frédéric Junier

Lycée du Parc
1 Boulevard Anatole France
69006 Lyon

6 septembre 2022

Plan

Chercher

*Un maître nageur utilise une corde de **128** mètres de long attachée à deux piquets A et D et deux bouées B et C pour délimiter une zone de baignade rectangulaire ABCD. Il se demande où placer ses piquets et ses bouées pour obtenir une zone de baignade ayant la plus grande aire possible. Pouvez-vous l'aider ?*

Modéliser

Modéliser

- Posons $x = AB$.

Modéliser

- Posons $x = AB$.
- $ABCD$ rectangle donc $CD = AB = x$.

Modéliser

- Posons $x = AB$.
- $ABCD$ rectangle donc $CD = AB = x$.
- De plus $AB + BC + CD = 128$ donc $BC = 128 - 2x$.

Modéliser

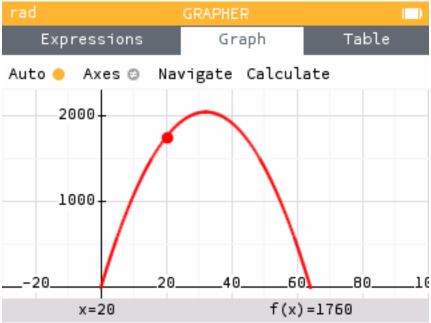
- Posons $x = AB$.
- $ABCD$ rectangle donc $CD = AB = x$.
- De plus $AB + BC + CD = 128$ donc $BC = 128 - 2x$.
- L'aire du rectangle est une fonction de x : $f(x) = x(128 - 2x)$ (**Forme factorisée de** $f(x)$)

Modéliser

- Posons $x = AB$.
- $ABCD$ rectangle donc $CD = AB = x$.
- De plus $AB + BC + CD = 128$ donc $BC = 128 - 2x$.
- L'aire du rectangle est une fonction de x : $f(x) = x(128 - 2x)$ (**Forme factorisée de** $f(x)$)
- L'aire f est définie si $0 \leqslant x \leqslant 128/2 = 64$

Représenter

On représente le graphe de la fonction f.



Conjecturer

D'après le graphique, on peut supposer que :

Conjecturer

D'après le graphique, on peut supposer que :

- Le maximum de l'aire f est atteint en $x = 32$.

Conjecturer

D'après le graphique, on peut supposer que :

- Le maximum de l'aire f est atteint en $x = 32$.
- Le maximum de l'aire f est atteint au milieu de l'intervalle $[0\,;64]$ où 0 et 64 solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Raisonner/Démontrer

On veut démontrer que pour tout réel $x \in [0\,;64]$, on a :

$$f(x) \leqslant f(32)$$

Calculer

On étudie le signe de la différence $f(x) - f(32)$:
Pour tout réel $x \in [0\,;64]$, on a :

$$f(x) - f(32) = x(128 - 2x) - 32 \times 64$$
$$f(x) - f(32) = x(128 - 2x) - 2 \times 32^2$$
$$f(x) - f(32) = -2x^2 + 2 \times 2 \times 32x - 2 \times 32^2$$

forme développée

$$f(x) - f(32) = -2(x^2 - 2 \times 32x - 32^2)$$

Calculer

On étudier le signe de la différence $f(x) - f(32)$:
Pour tout réel $x \in [0 ; 64]$, on a :

$$f(x) - f(32) = -2(x - 32)^2$$

Raisonner

Pour tout réel $x \in [0;64]$, on a $f(x) - f(32) = -2(x-32)^2$.
Un carré est toujours positif, donc, pour tout réel $x \in [0;64]$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(32) &\leqslant 0 \\ f(x) &\leqslant f(32) \end{aligned}$$

$f(32)$ est bien le maximum de l'aire f sur l'intervalle $[0;64]$.

Synthèse

On a rencontré plusieurs formes de l'expression $f(x)$

Synthèse

On a rencontré plusieurs formes de l'expression $f(x)$

- La **forme factorisée** $f(x) = x(128 - 2x)$ nous a donné les solutions de l'équation $f(x) = 0$ par la règle du produit nul.

Synthèse

On a rencontré plusieurs formes de l'expression $f(x)$

- La **forme factorisée** $f(x) = x(128 - 2x)$ nous a donné les solutions de l'équation $f(x) = 0$ par la règle du produit nul.
- La **forme développée** $f(x) = -2x^2 + 128x$ nous a servi comme étape de transformation de la forme factorisée et met en évidence que f est une **fonction polynôme du second degré**.

Synthèse

On a rencontré plusieurs formes de l'expression $f(x)$

- La **forme factorisée** $f(x) = x(128-2x)$ nous a donné les solutions de l'équation $f(x) = 0$ par la règle du produit nul.
- La **forme développée** $f(x) = -2x^2 + 128x$ nous a servi comme étape de transformation de la forme factorisée et met en évidence que f est une **fonction polynôme du second degré**.
- La **forme canonique** $f(x) = f(32) - 2(x-32)^2$ a mis en évidence l'existence d'un maximum qui est atteint au sommet de la parabole.