Exercice 1

On admet qu'on peut définir la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 4}$.

1. **a.** Calculer u_1 et u_2, donner les résultats sous forme d'entier ou de fraction irréductible.

   b. On donne $u_{1000} = -\dfrac{1000}{1003}$, calculer u_{999} (sans utiliser la formule explicite de la dernière question).

2. On considère qu'on peut définir la suite (v_n) pour tout entier $n \geqslant 0$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

   a. Calculer v_1 et v_2, donner les résultats sous forme d'entier ou de fraction irréductible.

   b. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie une liste des $n+1$ premiers termes de la suite (v_n) de v_0 à v_n.

```
def liste_v(n):
    u = 0
    v = .....
    lis = [v]
    for k in range(n):
        u = .....
        v = ......
        ............
    return lis
```

   c. On obtient la liste suivante pour `liste_v(5)`.
   On rappelle que Python ne donne que des valeurs approchées des nombres réels, par exemple `1.3333333333333333` représente $\dfrac{4}{3}$ et `1.6666666666666667` représente $\dfrac{5}{3}$.

```
[1.0, 1.3333333333333333, 1.6666666666666667, 2.0,
    2.333333333333333, 2.666666666666666]
```

   - Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite (v_n) (arithmétique, géométrique, ni arithmétique ni géométrique) ?
   - Démontrer cette conjecture.
   - En déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n = \dfrac{-n}{3+n}$.

Exercice 2

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

On estime que :

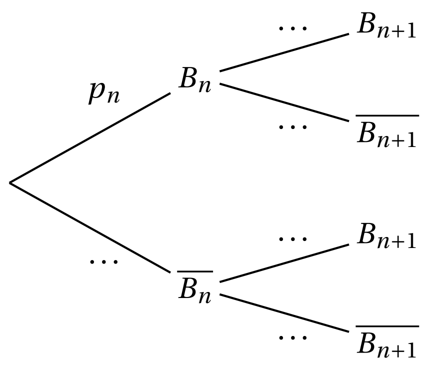
- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel. On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.

On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = 0,5(p_n - 0,8)$.

b. En déduire que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

c. En déduire que pour tout entier naturel n on a $p_n = 0,8 + 0,5^n \times 0,2$.

d. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse

☞ **Affirmation 1 :** *Il existe un entier i tel que $p_i < 0,8 + 10^{-6}$.*

☞ **Affirmation 2 :** *Il existe un entier j tel que $p_j \leqslant 0,8$.*