Produit scalaire
Corrigés

Capacité 5 ***Calculer un angle avec le produit scalaire (voir exo 2 p. 213)***

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(0;4)$, $B(6;3)$ et $C(-4;-2)$.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes pour déterminer une mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-0\\3-4\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4-0\\-2-4\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$

D'une part :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6\times(-4)+(-1)\times(-6) = -24+6 = -18$

$AB^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = 6^2+(-1)^2 = 37$ et $AC^2 = (-4)^2+(-6)^2 = 16+36 = 52$

donc $AB = \sqrt{37}$ et $AC = \sqrt{52}$

Par ailleurs $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{-18}{\sqrt{37}\times\sqrt{52}}$

puis $\widehat{BAC} = \operatorname{acos}\left(\dfrac{-18}{\sqrt{37}\times\sqrt{52}}\right) \simeq 114°$

Capacité 6 ***Utiliser la propriété de bilinéarité***

1. **a.** Soit A, B et C trois points du plan.
   Démontrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

   b. En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

2. Soit $ABCD$ un parallélogramme.

   a. A l'aide du produit scalaire, démontrer que $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = AC^2+BD^2$.

   b. Si $ABCD$ est un rectangle, quel théorème connu depuis l'Antiquité peut-on retrouver ?

1) Soit A, B, C trois points.

a) Pour tout point M du plan :

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{CA}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC}$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}$ $= \overrightarrow{MA}\cdot\vec{0}+\overrightarrow{AB}\cdot\vec{0} = 0$

b) Soit ABC un triangle, $\mathcal{D}_1$ la hauteur issue de A et $\mathcal{D}_2$ issue la hauteur issue de B.

Si on avait $\mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2$ alors puisque $\mathcal{D}_1 \perp (BC)$ et $\mathcal{D}_2 \perp (AC)$ on aurait $(BC) // (AC)$ ce qui est absurde.

Donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont un point d'intersection H.

On peut lui appliquer la formule précédente.

$\vec{HA}\cdot\vec{BC} + \vec{HB}\cdot\vec{CA} + \vec{HC}\cdot\vec{AB} = 0$

Or (HA) hauteur issue de A donc $\vec{HA}\cdot\vec{BC} = 0$

et (HB) hauteur issue de B donc $\vec{HB}\cdot\vec{CA} = 0$

On en déduit que $\vec{HC}\cdot\vec{AB} = 0$

et donc que H appartient à la hauteur issue de C

Ainsi on a démontré que les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes.

2) Soit ABCD un parallélogramme.

a) $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AB^2 + DA^2 + BC^2 + CD^2$.

Or ABCD parallélogramme donc $DA^2 = BC^2$

On a donc $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AB^2 + BC^2 + BC^2 + CD^2 = (\vec{AB} + \vec{BC})^2 - 2\vec{AB}\cdot\vec{BC}$
$+ (\vec{BC} + \vec{CD})^2 - 2\vec{BC}\cdot\vec{CD}$

On a donc $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 - 2\vec{BC}\cdot(\vec{AB} + \vec{CD})$

Or ABCD parallélogramme donc $\vec{AB} = -\vec{CD}$

On a donc $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 - 2\vec{BC}\cdot\vec{0} = AC^2 + BD^2$

Ainsi la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égal à la somme des carrés des longueurs des diagonales

b) Si ABCD est rectangle alors ABC et CDA sont des triangles rectangles respectivement en B et D.

De plus AB = CD et BC = DA car ABCD parallélogramme et $AC = BD$ car les diagonales d'un rectangle sont de même longueur

On en déduit que :

$\begin{cases} ABCD \text{ parallélogramme} \\ \text{et } ABC \text{ rectangle en } B \end{cases} \Leftrightarrow ABCD \text{ rectangle} \Leftrightarrow 2(AB^2 + BC^2) = 2AC^2$

$\begin{cases} ABC \text{ parallélogramme} \\ \text{et } ABC \text{ rectangle en } B \end{cases} \Leftrightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$

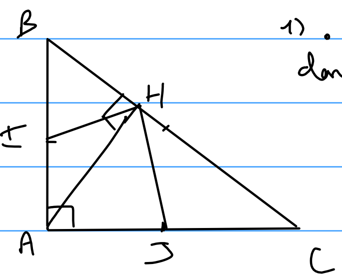
On retrouve le théorème de Pythagore

Capacité 7 ***Choisir une forme adaptée pour calculer un produit scalaire***

Soit ABC un triangle rectangle en A, I et J les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$ et H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. On veut démontrer que les droites (HI) et (HJ) sont orthogonales.

1. Justifier que $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}$
2. En déduire que $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = -AH^2$
3. On admet que $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HA}\right)$ et $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC}\right)$.

   Déduire des questions précédentes que $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{HJ} = 0$ et conclure.



1) • $\vec{HB}$ projeté orthogonal de $\vec{AB}$ sur (HC)

donc par projection orthogonale $\vec{AB}.\vec{HC} = \vec{HB}.\vec{HC}$

$\vec{AB}.\vec{HA} = \vec{AB}.(\vec{HC} + \vec{CA}) = \vec{AB}.\vec{HC} + \vec{AB}.\vec{CA}$

Or $(AB) \perp (CA)$ donc $\vec{AB}.\vec{CA} = 0$

On a donc $\vec{AB}.\vec{HA} = \vec{AB}.\vec{HC}$

2) $\vec{AH}$ projeté orthogonal de de $\vec{AB}$ sur (HA)

donc par projection orthogonale $\vec{AB}.\vec{HA} = \vec{AH}.\vec{HA} = (-\vec{HA}).\vec{HA}$

$\vec{AB}.\vec{HA} = -HA^2 = -AH^2$ car $HA = AH$ égalité de longueurs

On en déduit que $\vec{HB}.\vec{HC} = \vec{AB}.\vec{HA} = -AH^2$

3) On a $\vec{HI} = \frac{1}{2}(\vec{HB} + \vec{HA})$ et $\vec{HJ} = \frac{1}{2}(\vec{HA} + \vec{HC})$

$\vec{HI}.\vec{HJ} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (\vec{HB} + \vec{HA}).(\vec{HA} + \vec{HC}) = \frac{1}{4}(\vec{HB}.\vec{HA} + \vec{HB}.\vec{HC} + HA^2 + \vec{HA}.\vec{HC})$

Or $(HB) \perp (HA)$ donc $\vec{HB}.\vec{HA} = 0$

et $\vec{HB}.\vec{HC} = -AH^2$ d'après question 2)

et $(HA) \perp (HC)$ donc $\vec{HA}.\vec{HC} = 0$

On en déduit que $\vec{HI}.\vec{HJ} = \frac{1}{4}(0 + AH^2 - AH^2 + 0) = 0$

Les droites (HI) et (HJ) sont donc perpendiculaires

Correction d'exercices du manuel

27 **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{14}{5}-1\\ \frac{17}{5}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{5}\\ \frac{12}{5}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}\frac{14}{5}-5\\ \frac{17}{5}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{11}{5}\\ \frac{12}{5}\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-1\\ 1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 0\end{pmatrix}$.

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{9}{5}\times 4+\frac{12}{5}\times 0=\frac{36}{5}$

b. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-4\times\left(-\frac{11}{5}\right)+0\times\frac{12}{5}=\frac{44}{5}$

c. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{9}{5}\times\frac{11}{5}-\frac{12}{5}\times\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{99}{25}+\frac{144}{25}=\frac{9}{5}$

2. D'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires. De même, les droites (CA) et (CB) d'une part et (BA) et (BC) d'autre part ne sont pas perpendiculaires. Le triangle ABC n'est pas rectangle.

30 **a.** $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-3-2\\ 1-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}1-2\\ 2-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=-5\times(-1)+3\times 4=17$

b. $\|\overrightarrow{MN}\|=\sqrt{(-5)^2+3^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$ et

$\|\overrightarrow{MP}\|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$.

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=\|\overrightarrow{MN}\|\times\|\overrightarrow{MP}\|\times\cos\left(\widehat{PMN}\right)$

$\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{PMN}\right)=\dfrac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{MN}\|\times\|\overrightarrow{MP}\|}\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{PMN}\right)=\dfrac{17}{\sqrt{34}\times\sqrt{17}}$

$\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{PMN}\right)=\dfrac{\sqrt{34}\times\sqrt{17}}{34}\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{PMN}\right)=\dfrac{17\sqrt{2}}{34}$

$\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{PMN}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Soit $\widehat{PMN}=\dfrac{\pi}{4}$.