Probabilités conditionnelles, corrigés des exemples du cours

Pdf du Cours, *mot de passe :* `parcPremiere`

Capacité 1

Une classe de première comporte 33 élèves. 15 pratiquent le hand-ball (noté H), 8 le tennis (noté T) et 17 ne pratiquent ni l'un ni l'autre. On choisit un élève au hasard dans cette classe. Chaque élève a une probabilité de $\frac{1}{33}$ d'être choisi.

Ω	H	$\overline{H}$	**Total**
T	$8-1=7$	$18-17=1$	8
$\overline{T}$	$25-17=8$	17	$33-8=25$
Total	15	$33-15=18$	33

Ω	H	$\overline{H}$	**Total**
T	$8-1=7$	$18-17=1$	8
$\overline{T}$	$25-17=8$	17	$33-8=25$
Total	15	$33-15=18$	33

La probabilité qu'un élève choisi au hasard pratique les deux sports est

$$\mathbb{P}(T \cap H) = \frac{7}{33}$$

Ω	H	$\overline{H}$	**Total**
T	$8-1=7$	$18-17=1$	8
$\overline{T}$	$25-17=8$	17	$33-8=25$
Total	15	$33-15=18$	33

La probabilité qu'un élève choisi au hasard pratique au moins l'un des deux sports est

$$\mathbb{P}(T \cup H) = \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(T \cap H) = \frac{8}{33} + \frac{15}{33} - \frac{7}{33} = \frac{16}{33}$$

ou encore $1 - \mathbb{P}(\overline{T} \cap \overline{H}) = 1 - \frac{17}{33} = \frac{16}{33}$

Activité 1

Tableau d'effectifs

Ω	C	$\overline{C}$	**Total**
A	......	......	......
$\overline{A}$	......	......	......
Total	......	......	......

Tableau d'effectifs

Ω	C	$\overline{C}$	**Total**
A	60	28	88
$\overline{A}$	$300-60=240$	$450-88=362$	$750-88=662$
Total	300	450	750

Question 2) a)

Loi de probabilité sur l'univers complet Ω des 750 employés :

$$\mathbb{P}(C) = \frac{300}{750} = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(C \cap A) = \frac{60}{750} = \frac{2}{25}$$

Question 2 b)

Loi de probabilité sur le sous-univers des 300 cadres :

$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5} \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}_C(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_C(A) = \frac{4}{5}$$

On remarque que :

$$\mathbb{P}_C(A) \times \mathbb{P}(C) = \frac{60}{300} \times \frac{300}{750} = \frac{60}{750} = \mathbb{P}(A \cap C)$$

On a donc :

$$\mathbb{P}_C(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)}$$

Question 3 a)

Probabilité sur l'univers complet Ω des 750 employés :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{88}{750}$$

Question 2) b)

Probabilité sur le sous-univers des 88 employés parlant anglais :

$$\mathbb{P}_A(C) = \frac{60}{88} \text{donc} \quad \mathbb{P}_A(\overline{C}) = 1 - \mathbb{P}_A(C) = \frac{28}{88}$$

On remarque que :

$$\mathbb{P}_A(C) \times \mathbb{P}(A) = \frac{60}{88} \times \frac{88}{750} = \frac{60}{750} = \mathbb{P}(A \cap C)$$

On a donc aussi :

$$\mathbb{P}_A(C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)}$$

Capacité 2

Soit l'univers Ω d'une expérience aléatoire sur lequel on définit une loi de probabilité $\mathbb{P}$ et soit D et C deux événements.

On donne : $\mathbb{P}(C) = 0,3$ et $\mathbb{P}_C(D) = 0,2$ et $\mathbb{P}(C \cup D) = 0,8$.

On a $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(C \cup D) - \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(C \cap D)$.

- Calcul de $\mathbb{P}(D)$:
  - On a $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(C \cup D) - \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(C \cap D)$.
  - $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}_C(D) \times \mathbb{P}(C) = 0,2 \times 0,3 = 0,06$.
  - Enfin $\mathbb{P}(D) = 0,8 - 0,3 + 0,06 = 0,56$.

- Calcul de $\mathbb{P}_D(C)$:
  - On a $\mathbb{P}_D(C) = \frac{\mathbb{P}(D\cap C)}{\mathbb{P}(D)}$
  - Donc $\mathbb{P}_D(C) = \frac{0{,}06}{0{,}56}$

Capacité 3

Tableau d'effectifs

Ω	Nombre de messages indésirables	Nombre de messages de bienvenus	Total
éliminés	---	---	---
conservés	---	---	---
Total	---	---	1000

Tableau d'effectifs

Ω	Nombre de messages indésirables	Nombre de messages de bienvenus	Total
éliminés	$0,95 \times 700 = 665$	$0,02 \times 300 = 6$	$665 + 6 = 671$
conservés	$700 - 665 = 35$	$300 - 6 = 294$	$1000 - 671 = 329$
Total	700	$1000 - 700 = 300$	1000

Question 2

- Calculs de probabilités :
  - $\mathbb{P}_C(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{294}{329}$
  - $\mathbb{P}_I(E) = \frac{\mathbb{P}(I \cap E)}{\mathbb{P}(I)} = \frac{665}{700}$
  - $\mathbb{P}(B \cap E) = \frac{6}{1000}$
  - $\mathbb{P}(E \cap I) = \frac{665}{1000}$

Question 2

- Probabilité pour que le message soit indésirable sachant qu'il est éliminé :

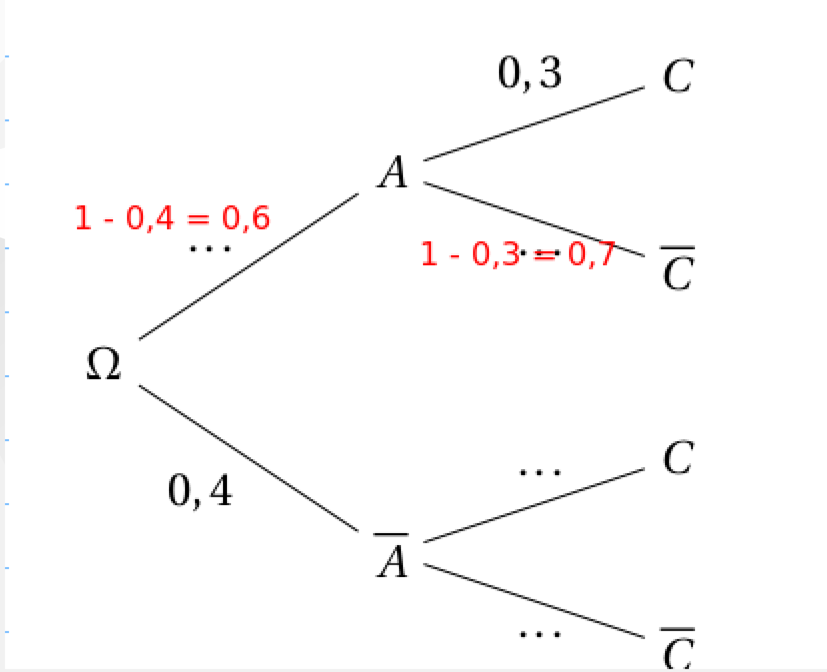
$$\mathbb{P}_E(I) = \frac{\mathbb{P}(E \cap I)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{665}{671}$$

Question 2

- Probabilité pour que le message soit conservé et indésirable :

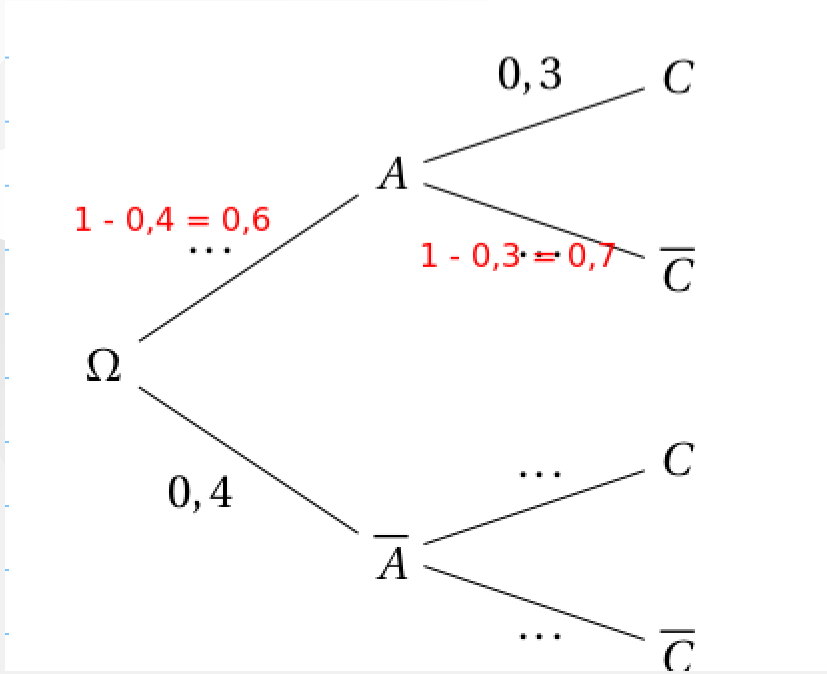
$$\mathbb{P}(I \cap C) = \frac{35}{1000}$$

Capacité 4



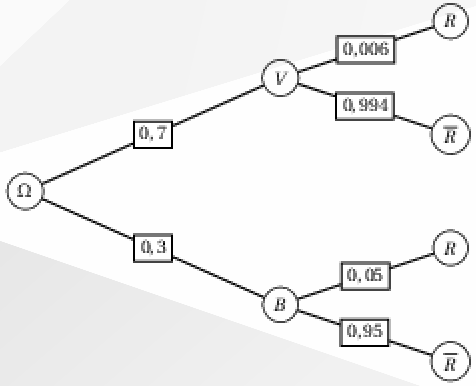
- Calculs de probabilités :
  - $\mathbb{P}(C \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(C \cap A) = 0,36 - 0,3 \times 0,6 = 0,18$

Capacité 4



- Calculs de probabilités :
  - $\mathbb{P}_C(A) = \frac{\mathbb{P}(C \cap \overline{A})}{\mathbb{P}(C)} = \frac{0{,}18}{0{,}36} = 0,5$

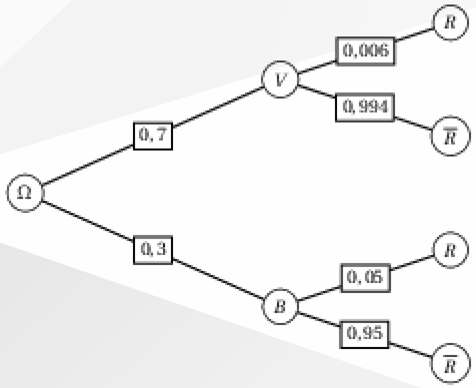
Capacité 5



Q2) :

$$\mathbb{P}(V \cap R) = \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(R)_{=} 0,7 \times 0,006 = 0,0042$$

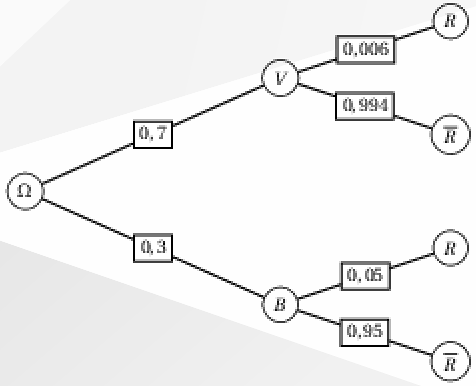
Capacité 5



Q3) Probabilités totales :

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(V \cap R) + \mathbb{P}(B \cap R) = 0,0042 + 0,3 \times 0,05 = 0,015 = 0,0192$$

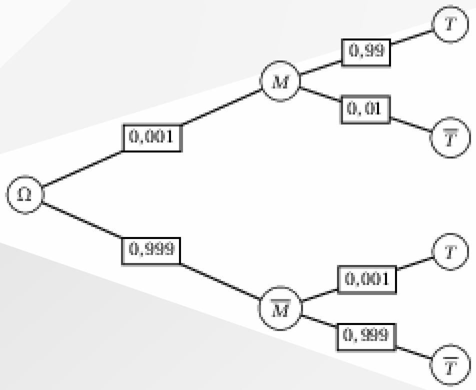
Capacité 5



Q4) : probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_R(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{0,3 \times 0,05}{0,0192} = \frac{0,015}{0,0192}$$

Capacité 6



Probabilité de l'événement $M \cap T$:

$$\mathbb{P}(M \cap T) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) = 0,001 \times 0,99 = 0,00099$$

Capacité 6

Probabilité de l'événement T avec la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(\overline{M} \cap T) + \mathbb{P}(M \cap T)$$
$$\mathbb{P}(T) = 0,999 \times 0,001 + 0,001 \times 0,99$$
$$\mathbb{P}(T) = 0,000999 + 0,00099 = 1,989 \times 10^{-3}$$

Capacité 6

Probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif :

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(T \cap M)}{\mathbb{P}(T)}$$

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{0,99 \times 10^{-3}}{1,989 \times 10^{-3}} = \frac{990}{1989} < 0,5$$