Corrigés d'exercices sur le produit scalaire

Exercice 1 Dans un repère orthonormé, soit les points $A(5;-1)$ $B(3;2)$ et $C(1;-3)$

1) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 5-3 \\ -1-2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-(-1) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$BA^2 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = 2^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$ donc $BA = \sqrt{13}$

$AC^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = (-4)^2 + (-2)^2 = 20$ donc $AC = \sqrt{20}$

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \times (-4) + 3 \times (-2) = 8 - 6 = 2$

3) D'après la formule du cosinus :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

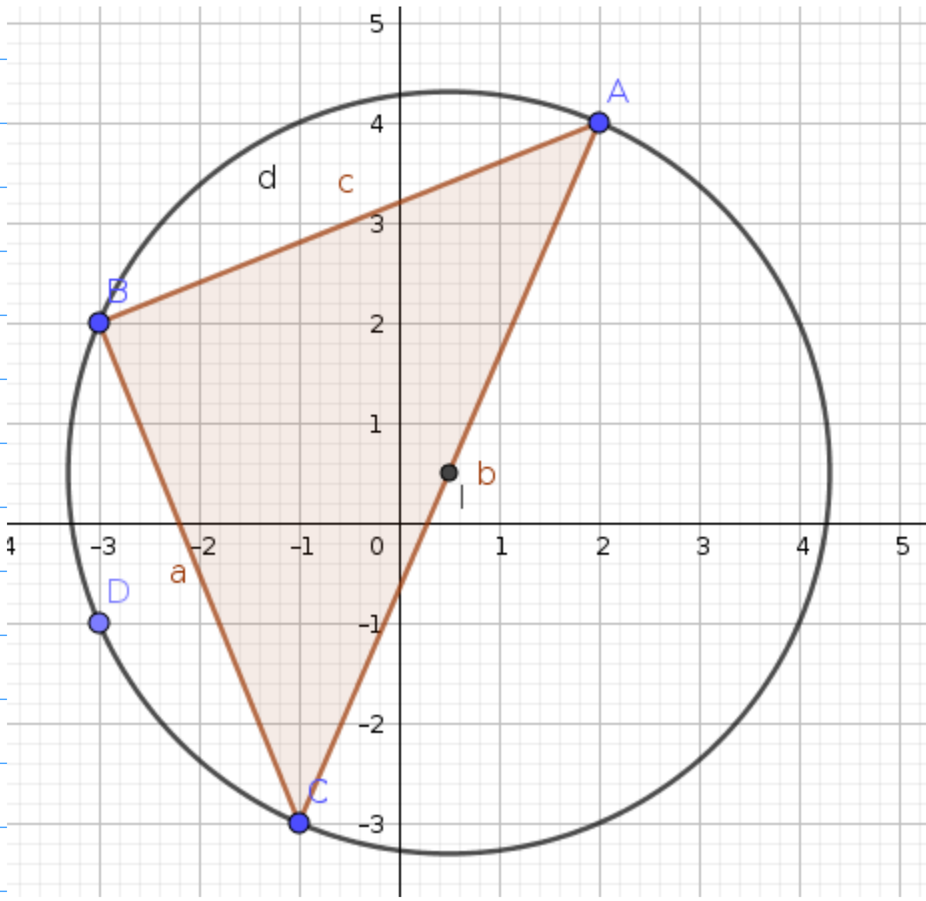
donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \dfrac{2}{\sqrt{20 \times 13}}$

donc $\widehat{BAC} \simeq 83°$

Exercice 2 Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(2;4)$ $B(-3;2)$ et $C(-1;-3)$

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-2\\2-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1-(-3)\\-3-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} =$
$= (-5)\times 2 + (-2)\times(-5)$
$= -10 + 10 = 0$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ orthogonaux

donc ABC rectangle en B $*$

De plus $AB^2 = (-5)^2 + (-2)^2 = 29$

et $BC^2 = 2^2 + (-5)^2 = 29$

donc $AB^2 = BC^2$

donc ABC isocèle en B $(**)$

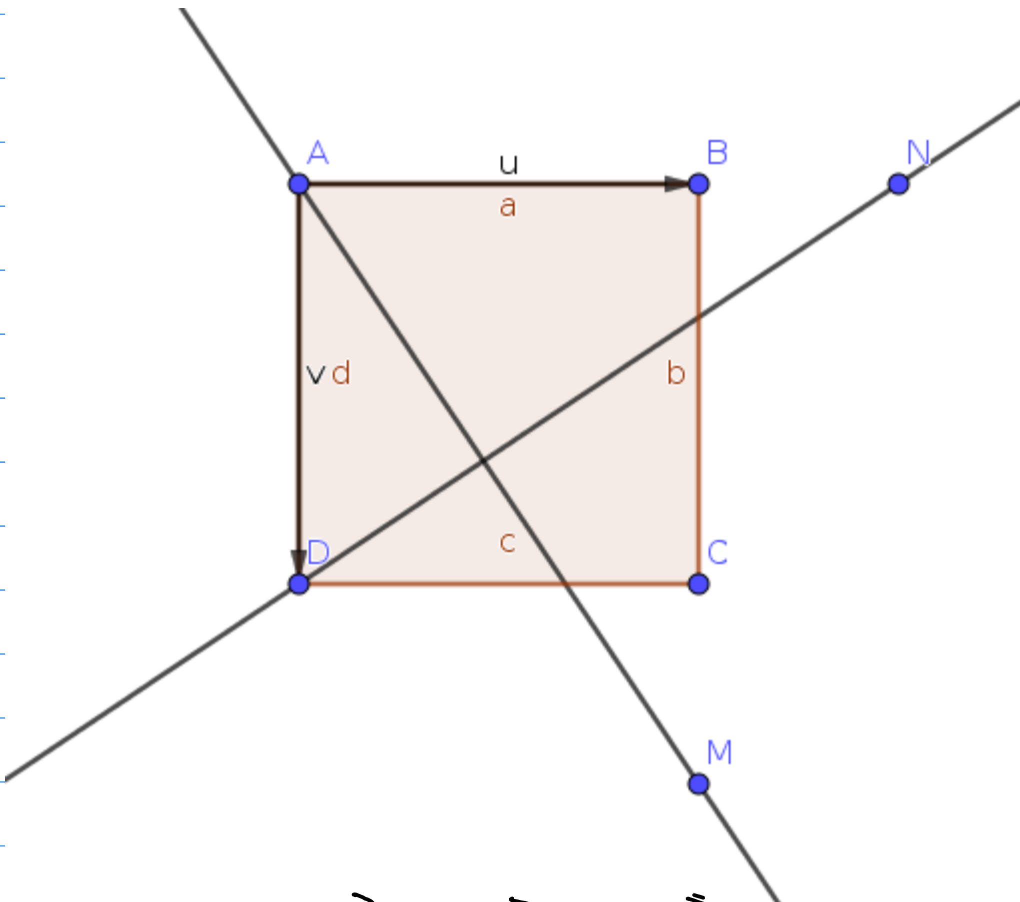
De $*$ et $**$ on déduit que ABC rectangle isocèle en B

Exercice 3

ABCD carré $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1) Figure



2) $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$

donc $\overrightarrow{DN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM} = \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\right)$$

$$\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{9}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

Or $\overrightarrow{AB}$ orthogonal à $\overrightarrow{BC}$ car ABCD carré

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Ensuite $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} = -BC^2$

On a donc $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}AB^2 - \frac{3}{2}BC^2$

Or ABCD carré donc $AB = BC$

Ainsi, on a $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ et les droites (DN) et (AM) sont perpendiculaires.

3) Il est plus simple de calculer avec les coordonnées

Dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ on a d'après les hypothèses :

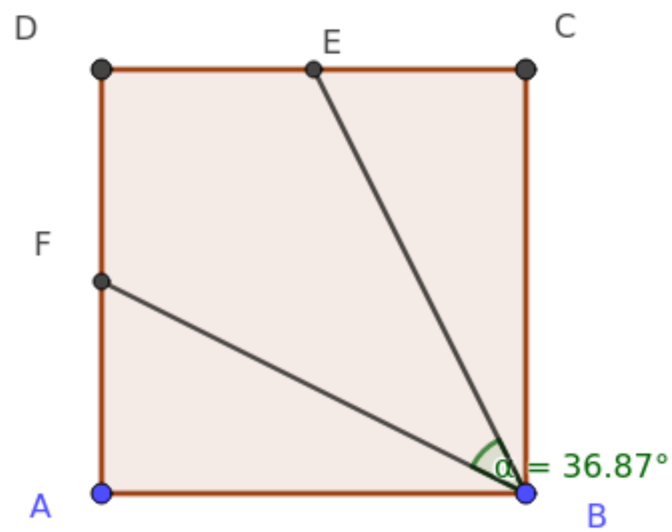
$\overrightarrow{DN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Ainsi $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2} \times 1 + \frac{3}{2} \times (-1) = 0$

et donc les droites (DN) et (AM) sont perpendiculaires

Exercice 4



ABCD est un carré de côté 4.
E est le milieu de [DC] et F est le milieu de [AD].

1) Les triangles BCE et BAF sont rectangles respectivement en C et en A et les côtés des angles droits ont même mesure 4 et 2.
Les triangles BCE et BAF sont donc superposables (ou isométriques).
On a donc BF = BE.
On calcule BF en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BAF.

$$BF^2 = BA^2 + AF^2$$

On a donc $BF^2 = 4^2 + 2^2 = 20$

BF est une longueur positive, donc :

$$\boxed{BF = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}}$$

2) Calculons $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BE}$ avec la formule du cosinus :

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BE} = BE \times BF \times \cos(\widehat{EBF}).$$

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BE} = \sqrt{20}^2 \times \cos(\widehat{EBF}) = 20 \cos(\widehat{EBF})$$

3) Décomposons les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$:

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$$

On peut appliquer les propriétés de bilinéa-rité :

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF})$$

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AF}$$

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

$\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$

On a donc $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires et de même sens

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF} = BC \times AF = 4 \times 2 = 8$$

$\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BA}$ colinéaires et de même sens

donc $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BA} = CE \times BA = 2 \times 4 = 8$

On en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF} = 8+8 = 16}$$

4) On déduit des questions 2) et 3) que :

$20\cos(\widehat{EBF}) = \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF} = 16$

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{EBF}) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

Avec la fonction arccosinus de la cal-
-culatrice, on en déduit que :

$$\boxed{\widehat{EBF} = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \simeq 37^\circ}$$