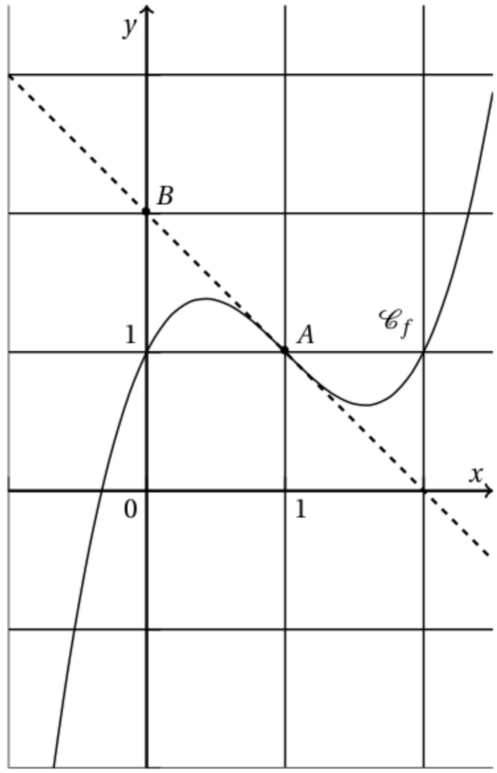
# Corrigé des exercices de la fiche n°2 dérivation

## Exercice 1

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

- le point $A(1;1)$ appartient à $\mathscr{C}_f$
- la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A$ passe aussi par le point $B(0;2)$




**Première partie**

*Dans cette partie on utilisera uniquement les coordonnées des points du graphique.*

1. Déterminer $f'(1)$ à l'aide des coordonnées des points $A$ et $B$.
2. En déduire une équation de la tangente $(AB)$ à $\mathscr{C}_f$ au point $A$.

1) $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A$ qui est la droite $(AB)$, donc :

$$f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-1}{0-1} = -1$$

2) D'après une propriété du cours, une équation de la tangente $(AB)$ est :

$$y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$$

$$y = -(x-1) + 1 \text{ c'est-à-dire } y = -x+2$$

**Seconde partie**

On admet désormais que $f$ est définie pour tout réel $x$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

1. Soit $x$ un réel, donner l'expression de $f'(x)$.
2. Démontrer que pour tout réel $x$ on a :

$$f(x) - (2 - x) = (x - 1)^3$$

3. En déduire l'étude des positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente au point $A$.

1) $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel $x$, on a.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

2) Soit $x$ un réel

D'une part $f(x) - (2-x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

D'autre part,

$(x-1)^3 = (x-1)^2(x-1)$

$= (x^2 - 2x + 1)(x-1)$

$= x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1$

$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

On en déduit que pour tout réel $x$, on a :

$f(x) - (2-x) = (x-1)^3$

## Exercice 5

Une rampe de skateboard est modélisée de la façon suivante :

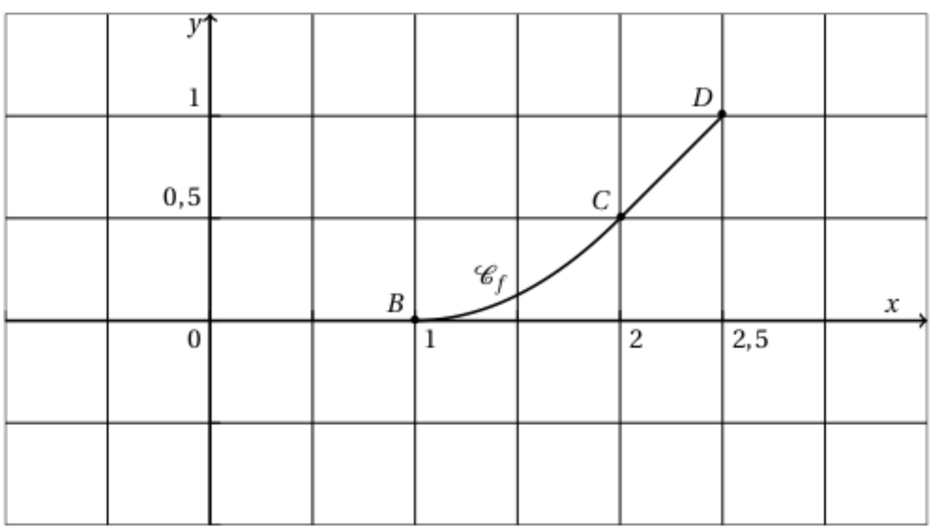
- une partie horizontale sur l'intervalle $[0; 1]$ d'extrémités les points $O(0; 0)$ et $B(1; 0)$ ;
- un arc de parabole sur l'intervalle $[1; 2]$ représentant la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a$, $b$ et $c$ sont des constantes réelles avec $a \neq 0$ ;
- un segment de droite sur l'intervalle $[2; 2,5]$ d'extrémités les points $C(2; 0,5)$ et $D(2,5; 1)$.

Le raccordement aux points $B$ et $C$ se fait sans cassure, c'est-à-dire que la tangente à la courbe de $f$ au point $B(1; 0)$ a pour coefficient directeur 0 et que $f'(2)$ est égal au coefficient directeur du segment $[CD]$.

1. $f$ est dérivable sur l'intervalle $[1; 2]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[1; 2]$ .
   Exprimer $f'(x)$ en fonction de $a$ et $b$.
2. D'après les conditions de raccordement fixées dans l'énoncé, quelles sont les valeurs de $f'(1)$ et $f'(2)$ ?
3. En déduire que $a$ et $b$ vérifient le système :

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$$

4. Déterminer les valeurs de $a$ et $b$.
5. Justifier que $a + b + c = 0$ et en déduire la valeur de $c$.



1) Pour tout réel $x \in [1;2]$, on a

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donc $f'(x) = 2ax + b$

2)

- La tangente à $\mathcal{C}_f$ en $B(1;0)$ a pour coefficient directeur 0, donc $f'(1) = 0$
- La tangente à $\mathcal{C}_f$ en $C(2;1)$ a pour coefficient directeur $\dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{1-0{,}5}{2{,}5-2} = \dfrac{0{,}5}{0{,}5} = 1$

On en déduit que $f'(2) = 1$

3)

$f'(1) = 0$ se traduit par $2a + b = 0$

$f'(2) = 1$ se traduit par $4a + b = 1$

Le couple $(a, b)$ est donc solution du système :

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$$

Résolvons ce système par substitution

$$\begin{cases} 2a+b=0 \\ 4a+b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-2a \\ 4a-2a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-2\times\frac{1}{2}=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

5) $\mathcal{C}_f$ passe par $C(1;0)$

on a donc $f(1)=0$

Or $f(1)=a+b+c$

On résout donc l'équation :

$$a+b+c=0 \iff \frac{1}{2}-1+c=0$$

$$\iff c=\frac{1}{2}$$

Finalement, on a :

$$a=\frac{1}{2} \quad b=-1 \quad \text{et } c=\frac{1}{2}$$

## Exercice 3

On considère la fonction :

$$g : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{634}{x}$$

$g$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

Déterminer les abscisses des points de la courbe représentant la fonction $g$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -634x + 731$.

La tangente $T_a$ à $\mathcal{C}_g$ en un point d'abscisse $a \neq 0$ a pour équation :

$$T_a : y = g'(a) \times (x - a) + g(a)$$

$$y = -\frac{634}{a^2} \times (x - a) + \frac{634}{a}$$

$T_a$ est parallèle à la droite d'équation $y = -634x + 731$

ssi $\frac{-634}{a^2} = -634$

On résout cette équation dans $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\frac{-634}{a^2} = -634 \iff \frac{1}{a^2} = 1 \iff \begin{cases} a = -1 \\ \text{ou} \\ a = 1 \end{cases}$$

Aux points d'abscisses $-1$ et $1$ la tangente à $\mathcal{C}_g$ est parallèle à la droite d'équation

$y = -634x + 731$

Exercice 4

On considère la fonction $f$ :

$$f : \mathbb{R} - \{1; -2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2x^2+3x-1}{x^2+x-2}$$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1; -2\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} - \{1; -2\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} - \{1; -2\}$ . On a calculé ci-dessous l'expression de $f'(x)$ avec un logiciel de calcul formel.

```
In [3]: fx = (2 * x ** 2 + 3 *x - 1)/(x ** 2 + x - 2)

In [4]: fx
```

Out[4]: $\dfrac{2x^2+3x-1}{x^2+x-2}$

```
In [5]: deriver(fx)
```

Out[5]: $-\dfrac{(x+1)(x+5)}{(x-1)^2(x+2)^2}$





Retrouver l'expression de $f'(x)$ par le calcul.

$f = \frac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto 2x^2+3x-1$
et $v : x \mapsto x^2+x-2$

$u$ et $v$ dérivables sur $\mathbb{R}-\{1;-2\}$ ensemble de définition de $f$, donc $f = \frac{u}{v}$ dérivable sur $\mathbb{R}-\{1;-2\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}-\{1;-2\}$ :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Or $u(x) = 2x^2+3x-1$ $\qquad v(x) = x^2+x-2$
$u'(x) = 4x+3$ $\qquad v'(x) = 2x+1$

On a donc :

$$f'(x) = \frac{(4x+3)(x^2+x-2) - (2x+1)(2x^2+3x-1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3+4x^2-8x+3x^2+3x-6-(4x^3+6x^2-2x+2x^2+3x-1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2-6x-5}{(x^2+x-2)^2}$$

De plus $-(x+1)(x+5) = -(x^2+6x+5) = -x^2-6x-5$

et $(x-1)(x+2) = x^2+2x-x-2 = x^2+x-2$

donc $f'(x) = \dfrac{-(x+1)(x+5)}{((x-1)(x+2))^2}$

$$f'(x) = \frac{-(x+1)(x+5)}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

# exo2

February 2, 2022

[51]:
```python
from sympy import *
x = Symbol("x")
```

## 0.1 Exercice 2

[52]:
```python
def deriver(expression):
    """Renvoie l'expression de la dérivée de expression"""
    return pretty_print(simplify(diff(expression, x)))
```

**Question 1**

[53]:
```python
f1 = 43 * x - 81
pretty_print(f1)
```

$$43x - 81$$

[54]:
```python
deriver(f1)
```

$$43$$

**Question 2**

[55]:
```python
f2 = 3 * x ** 67 - 91 * x + 79
pretty_print(f2)
```

$$3x^{67} - 91x + 79$$

[56]:
```python
deriver(f2)
```

$$201x^{66} - 91$$

**Question 3**

[57]:
```
f3 = x ** 16 - x ** 54 + x + 5
pretty_print(f3)
```

$$-x^{54} + x^{16} + x + 5$$

[58]:
```
deriver(f3)
```

$$-54x^{53} + 16x^{15} + 1$$

**Question 4**

[59]:
```
f4 = 5 * 1/x  + 95 * sqrt(x)
pretty_print(f4)
```

$$95\sqrt{x} + \frac{5}{x}$$

[60]:
```
deriver(f4)
```

$$-\frac{5}{x^2} + \frac{95}{2\sqrt{x}}$$

**Question 5**

[61]:
```
f5 = (5 - 2 * x)/ 3
pretty_print(f5)
```

$$\frac{5}{3} - \frac{2x}{3}$$

[62]:
```
deriver(f5)
```

$$-\frac{2}{3}$$

**Question 6**

[63]:
```
f6 = x ** 6 - 4 * x ** 5 + 3 * x ** 3 - x + 7
pretty_print(f6)
```

$$x^6 - 4x^5 + 3x^3 - x + 7$$

[64]:
```
deriver(f6)
```

$$6x^5 - 20x^4 + 9x^2 - 1$$

**Question 7**

[65]:
```
f7 = x ** 3 - x ** 2 + 5 - 4 * x
pretty_print(f7)
```

$$x^3 - x^2 - 4x + 5$$

[66]:
```
deriver(f7)
```

$$3x^2 - 2x - 4$$

**Question 8**

[67]:
```
f8 = x ** 3 / 2 - 3 * x ** 2 + 5 / x
pretty_print(f8)
```

$$\frac{x^3}{2} - 3x^2 + \frac{5}{x}$$

[68]:
```
deriver(f8)
```

$$\frac{3x^3(x-4) - 10}{2x^2}$$

**Question 9**

[69]:
```
f9 = (1 - 2 * x) * (0.5 * x ** 2 + 1)
pretty_print(f9)
```

$$(1 - 2x)\left(0.5x^2 + 1\right)$$

[70]:
```
deriver(f9)
```

$$-3.0x^2 + 1.0x - 2.0$$

**Question 10**

[71]:
```
f10 = 1/x - x ** 4 + 3 * x ** 2 + x ** 4 / 5 - 2 / 3 * x ** 6
pretty_print(f10)
```

$$-0.666666666666667x^6 - \frac{4x^4}{5} + 3x^2 + \frac{1}{x}$$

[72]:
```
deriver(f10)
```

$$-4.0x^5 - \frac{16x^3}{5} + 6x - \frac{1}{x^2}$$

**Question 11**

[73]:
```
f11 = (3 * x ** 2 + 1) * (2 * x - 3)
pretty_print(f11)
```

$$(2x - 3)\left(3x^2 + 1\right)$$

[74]:
```
deriver(f11)
```

$$18x^2 - 18x + 2$$

**Question 12**

[75]:
```
f12 = (3 * x ** 2 + x ** 4 - 5 ** 3 + 1) ** 2
pretty_print(f12)
```

$$\left(x^4 + 3x^2 - 124\right)^2$$

[76]:
```
deriver(f12)
```

$$8x^7 + 36x^5 - 956x^3 - 1488x$$

**Question 13**

[77]:
```
f13 = 6 * sqrt(x) + 3/x - 2/x**5
pretty_print(f13)
```

$$6\sqrt{x} + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^5}$$

[78]:
```
deriver(f13)
```

$$-\frac{3}{x^2} + \frac{10}{x^6} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

### Question 14

[79]:
```
f14 = 6 * x * sqrt(x)
pretty_print(f14)
```

$$6x^{\frac{3}{2}}$$

[80]:
```
deriver(f14)
```

$$9\sqrt{x}$$

### Question 15

[81]:
```
f15 = (1 - 2 * x) * (0.5 * x ** 2 + 1)
pretty_print(f15)
```

$$(1-2x)\left(0.5x^2+1\right)$$

[82]:
```
deriver(f15)
```

$$-3.0x^2+1.0x-2.0$$

[83]:
```
f13 = 2+5/(x-1)
```

### Question 16

[84]:
```
f16 = (5 * x - 3)/(x - 2)
pretty_print(f16)
```

$$\frac{5x-3}{x-2}$$

[85]:
```
deriver(f16)
```

$$-\frac{7}{(x-2)^2}$$

### Question 17

[106]:
```
f17 = 2 + 5/(x-1)
pretty_print(f17)
```

$$2 + \frac{5}{x - 1}$$

[107]:
```
deriver(f17)
```

$$-\frac{5}{(x - 1)^2}$$

**Question 18**

[108]:
```
f18 = 3 - 2 * x - 5 * x / (x + 1)
pretty_print(f18)
```

$$-2x - \frac{5x}{x + 1} + 3$$

[109]:
```
deriver(f18)
```

$$-2 - \frac{5}{(x + 1)^2}$$

**Question 19**

[111]:
```
f19 = sqrt(x) / (x - 1)
pretty_print(f19)
```

$$\frac{\sqrt{x}}{x - 1}$$

[113]:
```
deriver(f19)
```

$$-\frac{x + 1}{2\sqrt{x}\,(x - 1)^2}$$

**Question 20**

[114]:
```
f20 = (x ** 2 + 1) / (x ** 2 + 2)
pretty_print(f20)
```

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

[115]:
```
deriver(f20)
```

$$\frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}$$

**Question 21**

[116]:
```
f21 = 1 / (7 - 5 * x)
pretty_print(f21)
```

$$\frac{1}{7-5x}$$

[117]:
```
deriver(f21)
```

$$\frac{5}{\left(5x-7\right)^2}$$

**Question 22**

[118]:
```
f22 = 5 / (x ** 2 - x)
pretty_print(f22)
```

$$\frac{5}{x^2-x}$$

[119]:
```
deriver(f22)
```

$$\frac{5\left(1-2x\right)}{x^2\left(x-1\right)^2}$$

**Question 23**

[120]:
```
f23 = (x ** 3 + 1) * (x ** 2 - 2)
pretty_print(f23)
```

$$\left(x^2-2\right)\left(x^3+1\right)$$

[121]:
```
deriver(f23)
```

$$x\left(5x^3-6x+2\right)$$